Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. А. ЛЕБЕДЕВ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, РЕГУЛЯРНЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ В КОЛЬЦЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 V 1955)

Пусть: $K\left(\frac{m}{M}\right)$ — класс функций $w=f(\zeta)$, регулярных и однолистных в кольце $m<|\zeta|<M$ $(m>0)$, не обращающихся в нуль, таких, что при $m<r_1<r_2<M$ образ окружности $|\zeta|=r_1$ лежит внутри образа окружности $|\zeta|=r_2$; $K\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $f(\zeta)\in K\left(\frac{m}{M}\right)$ и принимающих в заданной точке z_0 из кольца $m\leqslant|z|\leqslant M$ заданное значение w_0; $K_T\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $w=f(\zeta)\in K\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$, отображающих кольцо $m<|z|<M$ на область, лежащую в кольце $m_T<|w|<M_T$, где $\frac{m_T}{M_T}=\frac{m}{M}e^{-T}$, $T>0$; $\tilde{K}\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $w=f(\zeta)\in K\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ и отображающих кольцо $m<|\zeta|<M$ на область, которая получена из плоскости w выбрасыванием двух кривых Жордана, кончающихся одним своим концом, соответственно, в точках 0 и ∞; $\tilde{K}_T\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $w=f(\zeta)\in K_T\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ и отображающих кольцо $m<|\zeta|<M$ на область, которая получена из кольца $m_T<|w|<M_T$ выбрасыванием двух кривых Жордана, кончающихся одним своим концом, соответственно, на окружностях $|w|=m_T$ и $|w|=M_T$; $K\left(\frac{\overline{m}}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $w=f(\zeta)\in K\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ и отображающих окружность $|\zeta|=m$ в некоторую окружность с центром в точке $w=0$; аналогично определяется класс $K\left(\frac{m}{\underline{M}}, \frac{z_0}{w_0}\right)$; $\tilde{K}\left(\frac{m}{\underline{M}}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ — класс функций $w=f(\zeta)\in K\left(\frac{m}{\underline{M}}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ и отображающих окружность $|\zeta|=m$ в некоторую кривую Жордана, уходящую одним своим концом в $w=0$; аналогично определяется класс $\tilde{K}\left(\frac{\overline{m}}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$.

Теорема. *Пусть функция* $w=f(\zeta)\in\tilde{K}\left(\frac{m}{M}, \frac{1}{1}\right)$. *Тогда для каждой функции* $\lambda(t)$, $0\leqslant\lambda(t)\leqslant 1$, *непрерывной в промежутке* $0\leqslant t<\infty$ *за исключением конечного числа разрывов первого рода и такой, что интегралы* $\int\limits_0^{+\infty}\lambda(t)\,dt$, $\int\limits_0^{\infty}(1-\lambda(t))\,dt$ *расходятся, найдутся непрерывные функции* $k_1(t)$ *и* $k_2(t)$, $0\leqslant t<+\infty$, *по модулю равные единице, такие, что функция* $f(\zeta)$ *представима по формуле*

$$f(\zeta)=\lim_{t\to\infty} f(\zeta, t),$$

где $f=f(\zeta, t)$ *есть решение уравнения*

$$\frac{d}{dt}\ln f = \lambda(t)\,[K_{q_t}(f^{-1}m_t k_1(t)) - K_{q_t}(m_t k_1(t))] -$$

$$-(1-\lambda(t))\,[K_{q_t}(fM_t^{-1}k_2(t)^{-1}) - K_{q_t}(M_t^{-1}k_2(t)^{-1})] \qquad (1)$$

при начальном условии $f|_{t=0}=\zeta$; *функция* $K_q(\zeta)$ *определяется формулой*

$$K_q(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2\nu}\zeta}{1-q^{2\nu}\zeta} - \frac{1+q^{2\nu}\zeta^{-1}}{1-q^{2\nu}\zeta^{-1}}\right),$$

$q=\frac{m}{M}$, $q_t=\frac{m_t}{M_t}=qe^{-t}$. *Величина* m_t *есть решение уравнения*

$$\frac{d}{dt}\ln m_t = -\lambda(t)\operatorname{Re}K_{q_t}(m_t k_1(t)) - (1-\lambda(t))[1-\operatorname{Re}K_{q_t}(q_t m_t^{-1}k_2(t)^{-1})],$$

$$m_t|_{t=0}=m. \qquad (2)$$

Обратно, всякое решение $f=f(\zeta, t)$ *уравнения* (1) (*где функция* $\lambda(t)$ *непрерывна в промежутке* $0\leqslant t<\infty$ *за исключением конечного числа разрывов первого рода*, $0\leqslant\lambda(t)\leqslant 1$; $k_1(t)$ *и* $k_2(t)$ — *функции, по модулю равные единице, непрерывные в* $0\leqslant t<\infty$ *за исключением конечного числа разрывов первого рода*; $q=\frac{m}{M}$, $m<1<M$; $q_t=qe^{-t}=\frac{m_t}{M_t}$; m_t — *решение уравнения* (2) *есть функция класса* $K_t\left(\frac{m}{M}, \frac{1}{1}\right)$; *кроме того*, $w=f(\zeta)=\lim\limits_{t\to\infty} f(\zeta, t)$ *есть функция класса* $K\left(\frac{m}{M}, \frac{1}{1}\right)$.

Замечания. 1. Если функция $w=f(\zeta)\in\widetilde{K}\left(\frac{m}{M}, \frac{1}{1}\right)$, то применимо сказанное выше, но в уравнениях (1) и (2) нужно положить $\lambda(t)\equiv 0$ и, если при этом $m=1$, то получим уравнение Комацу ([1,2]).

2. Если функция $w=f(\zeta)\in\widetilde{K}\left(\frac{m}{M}, \frac{1}{1}\right)$, то в уравнениях (1) и (2) нужно положить $\lambda(t)\equiv 1$.

3. Ли Ен Пир ранее получил уравнение (1), но в его уравнении функция $\lambda(t)$ принимает только значения нуль и единица и определяется функцией $f(\zeta)$ так же, как и функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$ ([3]). Кроме того, Ли Ен Пир не доказал обратного утверждения.

Опираясь на приведенную теорему, удается получить некоторые оценки в классе $K\left(\frac{m}{M}\right)$ и его подклассах. В частности, удается получить точные оценки сверху и снизу модуля функции $f(\zeta)\in\widetilde{K}_T\left(\frac{m}{M}, \frac{z_0}{w_0}\right)$ при заданном ζ из кольца $m<|\zeta|<M$.

Поступило
29 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Y. Komatu, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 25, 1 (1943). [2] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 29 (71): 2, 469 (1951). [3] Ли Ен Пир, ДАН, 92, № 3, 475 (1953).