ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА
Том 144 1959.

М. Р. КУВАЕВ

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЕВНЕРА ДЛЯ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье рассматривается обобщение уравнения типа Левнера для автоморфных функций [1] на случай нескольких разрезов.

1. Рассмотрим функцию

$$z = \Phi(w, t),\ \Phi(0, t) = 0,\ \Phi'(0, t) = \exp(-t),\ 0 < t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1)$$

конформно отображающую круг $|w| < 1$ на однопараметрическое семейство областей $B(t)$, получаемых из некоторой начальной $p+1$ — связной области B_0, ограниченной $\Gamma_0: |z| = 1$ и жордановыми кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$, лежащими внутри Γ_0, проведением системы разрезов по кривым Жордана $C_0, C_1, \ldots C_p$, исходящим соответственно из точек кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \Gamma_p$. Области B_0 и $B(t)$ содержат начало координат.

Функция $w = F(z,t)$, обратная к $z = \Phi(w,t)$, конформно и взаимно однозначно отображает поверхность наложения области $B(\tau)$, $\tau > t$, на область $G(t, \tau)$, получаемую из $|w| < 1$ проведением $p+1$ систем L_j, $j = 0, 1, \ldots p$, разрезов по дугам $\{l_{nj}\}$, каждая из которых содержит счетное число дуг l_{nj}, соответствующих в отображении (1) части $C_j(t, \tau)$

$$z = \varphi_j(x),\ t \leqslant x < \tau$$

кривой C_j, и переходящих друг в друга при преобразованиях группы $\mathfrak{A}$ преобразований единичного круга в себя, относительно которой функция $\Phi(w, t)$ автоморфна.

Обозначим через

$$w = f(u, t, \tau),\ f(0, t, \tau) = 0,\ f'(0, t, \tau) = \exp(t - \tau)$$

функцию, конформно и однолистно отображающую $|u| < 1$ на область $G(t, \tau)$, а через γ_{nj} — дуги окружности $|u| = 1$, соответствующие в этом отображении разрезам l_{nj}. Как и в случае одного разреза, можно показать, что как и при t фиксированном и $\tau \to t$, так и при τ фиксированном и $t \to \tau$, все дуги γ_{nj} и разрезы l_{nj} одновременно стягиваются в точки $\mu_{nj}(t)$ или $\mu_{nj}(\tau)$, соответствующие в отображении (1) концам разрезов, а функция $f(u, t, \tau)$ равномерно в круге $|u| < 1$ стремится к u.

Очевидно, что

$$\Phi(u, \tau) = \Phi(f(u, t, \tau), t). \quad (3)$$

2. Введем в рассмотрение $p+1$ вспомогательных функций. Пусть функция

$$w = f_0(u_0, t, \tau),\quad f_0(0, t, \tau) = 0,\quad f_0'(0, t, \tau) > 0 \tag{4}$$

отображает $|u_0| < 1$ на односвязную область $G_0(t, \tau)$, получаемую из $G(t, \tau)$ присоединением к последней всех точек систем $L_1, L_2, \ldots L_p$ разрезов l_{nj} за исключением концов, лежащих на $|w| = 1$.

Функция $f_0(u_0, t, \tau)$ отображает на область $G(t, \tau)$ односвязную область $G_1(t, \tau)$, получаемую из $|u_0| < 1$ проведением p систем $L_{10}, L_{20}, \ldots L_{po}$ разрезов l_{njo}, $J = 1, 2, \ldots p$, соответствующих в отображении (4) дугам l_{nj} систем $L_1 L_2, \ldots L_p$.

Аналогично предыдущему рассмотрим функцию

$$u_0 = f_1(u_1, t, \tau),\ f_1(o, t, \tau) = 0,\ f_1'(o, t, \tau) > 0, \tag{5}$$

отображающую $|u_2| < 1$ на область $G_{10}(t, \tau)$, получаемую из области G_1 присоединением точек систем $L_{20}, L_{30}, \ldots L_{po}$ разрезов l_{njo}, $j = 2, 3, \ldots p$, и так далее.

Функции f_κ (u_κ, t, τ) производят отображения типа, рассмотренного во втором и третьем параграфах статьи [1] и поэтому представимы в виде

$$f_\kappa = u_\kappa - (\tau - t)\, u_\kappa\, a_\kappa(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^1_{n\kappa} \frac{\mu_{n\kappa} + u_\kappa}{\mu_{n\kappa} - u_\kappa} + o(\tau - t), \tag{6}$$

где через $o(t - \tau)$ обозначена бесконечно малая выше первого порядка по отношению к $\tau - t$, через a_κ (t), a_κ $(t) < 1$, — положительные функции t. Множители a_κ (t) появились потому, что функции f_κ $(u_\kappa$ $t, \tau)$ не удовлетворяют условию $f_\kappa'(o, t, \tau) = \mathrm{epx}\,(t - \tau)$.

3. Переходя в очевидном соотношении

$$\frac{f(u, t, \tau) - u}{\tau - t} = \sum_{\kappa=0}^{p} \frac{f_\kappa\,(u_\kappa, t, \tau) - u_\kappa}{\tau - t} =$$

$$= -\sum_{\kappa=0}^{p} u_\kappa\, a_\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \delta^1_{n\kappa} \frac{\mu_{n\kappa} + u_\kappa}{\mu_{n\kappa} - u_\kappa} + 0\,(\tau - t)$$

к пределу при $\tau - t \to 0$ и учитывая, что при этом f_κ (u_κ, t, τ) равномерно в круге $|u_\kappa| < 1$ стремится к u_κ и, следовательно, к u, и полагая

$$\delta^1_{n\kappa} \cdot a_\kappa = \delta_{n\kappa},$$

находим

$$\lim_{\tau - t \to 0} \frac{f(u, t, \tau) - u}{\tau - t} = -u \sum_{\kappa=0}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\kappa} \frac{\mu_{n\kappa} + u}{\mu_{n\kappa} - u}. \tag{7}$$

Вернемся теперь к фунции $\Phi(w, t)$. Отношение

$$\frac{\Phi(w, \tau) - \Phi(w, t)}{\tau - t}$$

на основании формулы (3) можно записать в виде

$$\frac{\Phi(w, r) - \Phi(w, t)}{\tau - t} = \frac{\Phi(f(w, t, \tau), t) - \Phi(w, t)}{f(w, t, \tau) - w} \cdot \frac{f(w, t, \tau) - w}{\tau - t}.$$

Переходя в нем к пределу при $\tau - t \to 0$ и учитывая предельное равенство (7), получим искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + w \sum_{\kappa=0}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\kappa} \frac{\mu_{n\kappa} + w}{\mu_{n\kappa} - w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0. \tag{8}$$

Дифференциальное уравнение (8) обладает тем преимуществом, что за начальную область B_0 можно взять круг $|z| < 1$ с p соответствующим образом выколотыми точками.

Дадим выражение функции $z = \psi(w)$, отображающей круг $|w| < 1$ на область B_0 в случае, когда внутренние континуумы ее вырождаются в точки, пусть это будут $a_1, a_2, \ldots a_p$, $0 < |a_\kappa| < 1$. Рассмотрим область $D(t)$, получаемую из $|z| < 1$ проведением p разрезов по дугам $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ концентрических с $|z| = 1$ окружностей, исходящих из точек $a_1, a_2, \ldots a_p$ и длины $|a_1|\ t$, $|a_2|\ t, \ldots, |a_p| t$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Очевидно, что при $t \to 0$ области $D(t)$ сходятся к B_0 как к ядру.

Известно ([2] стр. 45—63), что функция

$$z = \exp\left\{-\frac{i}{\pi} \sum_{\kappa=1}^{p} b_\kappa \sum_{n} \log \frac{\zeta - \beta_{n\kappa}}{\zeta - \alpha_{n\kappa}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n} \log \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \zeta_n}\right\} \tag{9}$$

отображает верхнюю полуплоскость переменного ζ на область $D(t)$ и переводит при этом отрезки $[\alpha_{n\kappa}, \beta_{n\kappa}]$ вещественной оси в разрезы γ_κ, точки ζ_n — в начало координат, а через b_κ обозначены константы, определяемые заданием точек $a_1, a_2, \ldots a_p$. Согласно теоремы Каратеодори, функция (9) равномерно сходится к фунции $\varphi(\zeta)$, отображающей полуплоскость $Jm\,\zeta > 0$ на область B_0, при $t \to 0$. Производя указанный предельный переход и замечая, что дуги $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ при этом стягиваются в точки $a_1, a_2, \ldots a_p$, и, следовательно, отрезки $[\alpha_{n\kappa}, \beta_{n\kappa}]$ также стягиваются в точки, из (9) находим

$$\varphi(\zeta) = \exp\left(\sum_{n} \log \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \zeta_n}\right) = \prod_{n} \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \zeta_n}, \tag{10}$$

Производя дробно-линейное преобразование

$$\zeta = \frac{1 + a}{2} \cdot \frac{w - 1}{w - a},\qquad \zeta_n = \frac{1 + a}{2} \cdot \frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n - a}$$

переводящее полуплоскость $\mathrm{Jm}\,\zeta > 0$ в единичный круг и бесконечно удаленную точку плоскости ζ в точку $w = a$ окружности $|w| = 1$, отличную от точек μ_n и предельных для таких точек, получим из (10) искомое выражение для функции $z = \psi(w)$:

$$\psi(w) = \prod_n \frac{1 - \bar{\alpha}_n a}{a - \alpha_n} \; \frac{w - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n w}.$$

4. Рассмотренный случай распределения разрезов не является единственно возможным. Можно рассматривать любую комбинацию разрезов с любым конечным числом разрезов. Вид уравнения (8) при этом не изменится, изменится лишь число слагаемых в первой сумме, которое, очевидно, совпадает с числом разрезов.

В частности, рассматривая случай одного разреза, исходящего из точки некоторого внутреннего континуума, получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + w \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \; \frac{\mu_n + w}{\mu_n - w} \; \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0,$$

по виду совпадающее с аналогичным уравнением статьи [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Куваев М. Р. и Куфарев П. П., Об уравнении типа Левнера для многосвязных областей, „Учен. зап. Томского университета“ 25 (1955).
2. Julia G., Les lecons sur la represetation conforme des aires multiplement connexes, Cahiers scientifiques, XIY (1934).

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева.