ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 144 1959

М. Р. КУВАЕВ

НОВЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЕВНЕРА ДЛЯ ДВУХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В настоящей статье дается новый вывод уравнения типа Левнера

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n+1}kf}{1-q^{2n+1}kf}-\frac{1+q^{2n+1}k}{1-q^{2n+1}k}\right), \tag{1}$$

где $k(t)$, $|k(t)|=1$, — некоторая функция t, для функции $Z=f(w,t)$, конформно и однолистно отображающей кольцо $1<|w|<q^{-1}$ на однопараметрическое семейство областей, получаемых из $|Z|>1$ проведением разреза вдоль некоторой кривой Жордана, уходящей одним концом в бесконечность. Это уравнение было получено У. Комацу [1], а затем другим, более простым, способом Г. М. Голузиным [2]. В основу вывода положено уравнение типа Левнера

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+P(w,t)\frac{\partial \Phi}{\partial w}=0, \quad t_0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{2}$$

для функции $Z=\Phi(w,t)$, $\Phi(0,t)=0, \Phi'_w(0,t)=\exp(-t)$, конформно, но неоднолистно, отображающей круг $|w|<1$ на однопараметрическое семейство областей $B(t)$, получаемых из некоторой однолистной двухсвязной области B_0 с внешним контуром $|Z|=1$ и внутренним граничным континуумом, вырожденным в точку Z_0, проведением разреза по некоторой кривой Жордана, исходящей из точки Z_0 и непроходящей через начало координат. Коэффициент $P(w,t)$ определяется следующей формулой

$$P(w,t)=w\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{\mu_n+w}{\mu_n-w}, \tag{3}$$

где $\delta_n(t)$ — положительные функции параметра t, $\Sigma\delta_n(t)\equiv 1$, $\mu_n(t)$ — — аффиксы точек окружности $|w|=1$, соответствующие в отображении $Z=\Phi(w,t)$ концу разреза [3, 4].

§ 1. Другое выражение для $P(w,t)$

1. Пусть преобразование $\omega=Sw$ единичного круга в себя, принадлежащее группе A, имеет вид

$$\frac{\omega-\alpha}{\omega-\beta}=\frac{w-\alpha}{w-\beta}K, \tag{4}$$

где α и β — предельные точки группы, лежащие на $|w|=1$, а $K(t)$ в рассматриваемом случае вещественно.

Вводя в уравнение (2) новое переменное ω и полагая

$$\Phi(w,t) = \psi(\omega,t),$$

получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left\{\frac{\partial\omega}{\partial t} + P(w,t)\frac{\partial\omega}{\partial w}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = 0.$$

Так как в результате такой замены уравнение не изменит своего вида ([3], § 6), то

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + P(w,t)\frac{\partial\omega}{\partial w} = P(\omega,t). \tag{5}$$

Дифференцируя теперь равенство (4), находим

$$\frac{\partial\omega}{\partial w} = K\left(\frac{\omega-\beta}{w-\beta}\right)^2,$$

$$\frac{\alpha-\beta}{(\omega-\beta)^2}\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\beta'(\omega-\alpha)-\alpha'(\omega-\beta)}{(\omega-\beta)^2} =$$

$$= K'\frac{w-\alpha}{w-\beta} + K\frac{\beta'(w-\alpha)-\alpha'(w-\beta)}{(w-\beta)^2}$$

и, используя это, имеем из равенства (5)

$$\frac{\alpha-\beta}{(\omega-\beta)^2}P(\omega,t) + \frac{(\beta'-\alpha')\omega+\alpha'\beta-\beta'\alpha}{(\omega-\beta)^2} =$$

$$= K\left\{\frac{\alpha-\beta}{(w-\beta)^2}P(w,t) + \frac{(\beta'-\alpha')w+\alpha'\beta-\beta'\alpha}{(w-\beta)^2}\right\} + K'\frac{w-\alpha}{w-\beta}. \tag{6}$$

Полагая

$$f(w) = \frac{\alpha-\beta}{(w-\beta)^2}P(w,t) + \frac{(\beta'-\alpha')w+\alpha'\beta-\beta'\alpha}{(w-\beta)^2} \tag{7}$$

из соотношения (6) будем иметь

$$(Sw) = Kf(w) + K'\frac{w-\alpha}{w-\beta}, \tag{8}$$

или, вводя новые переменные

$$v = \lambda\frac{w-\alpha}{w-\beta}, \quad f(w) = F(v), \tag{9}$$

где $\lambda(t)$ — некоторая функция параметра, находим

$$F(Kv) = KF(v) + \frac{K'}{K}v. \tag{10}$$

Полагая еще

$$y = m\log v, \qquad \psi(y) = F(v):v$$

получим важное для дальнейшего соотношение

$$\psi(y+m\log K) = \psi(y) + \frac{K'}{\lambda K}. \tag{11}$$

Кроме того, очевидно

$$\psi(y+2m\pi i) = F(ve^{2\pi i}):(ve^{2\pi i}) = F(v):v = \psi(y). \tag{12}$$

2. Функция $f(w)$ имеет простые полюсы в точках $w=\mu_n$ и существенно особые точки $w=\alpha$, $w=\beta$, являющиеся точками сгущения для полюсов. Вычеты $f(w)$ относительно этих полюсов легко находятся из формул (3) и (7) и равны

$$\operatorname*{Res}_{w=\mu_n} f(w) = -\frac{\alpha-\beta}{(\mu_n-\beta)^2}2\,\mu_n^2\,\delta_n, \tag{13}$$

Тогда функция $\psi(y)$ имеет простые полюсы в точках

$$\eta_{n\nu} = \eta_0 + nm\log K + \nu 2m\pi i, \qquad \eta_0 = m\log\left(\lambda\frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\right)$$

с вычетами

$$\operatorname*{Res}_{y=\eta_{n\nu}}\psi(y) = p_n = -2m\delta_n\,\mu_n^2(\alpha-\beta)^2(\mu_n-\alpha)^{-2}(\mu_n-\beta)^{-2}. \tag{14}$$

Покажем, что $p_n = p_0 = \text{const}$.

Из (14) имеем

$$p_1:p_0 = \mu_1^2\,\mu_0^{-2}\,\delta_1\delta_0^{-1}[(\mu_0-\alpha)(\mu_0-\beta)(\mu_1-\alpha)^{-1}(\mu_1-\beta)^{-1}]^2. \tag{15}$$

Запишем преобразование (4) в ином виде

$$\omega = \frac{w-c}{1-\bar{c}w}e^{i\varphi}. \tag{16}$$

Параметры этих двух записей одного и того же преобразования взаимно связаны, в частности параметры c и φ выражаются через α, β и K следующим образом

$$c = \frac{\alpha\beta(1-K)}{\alpha-K\beta}, \tag{17}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\alpha-K\beta}{K\alpha-\beta}.$$

Из формулы (4) и (16) имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial w} = K\left(\frac{\omega-\beta}{w-\beta}\right)^2 = e^{i\varphi}\frac{1-c\bar{c}}{(1-\bar{c}w)^2}.$$

и на основании (18),

$$K\left(\frac{\mu_1-\beta}{\mu_0-\beta}\right)^2=\frac{\alpha-K\beta}{K\alpha-\beta}\cdot\frac{1-c\bar c}{(1-\bar c\,\mu_0)^2}. \tag{19}$$

Используя соотношение, найденное в статье [3],

$$\delta_1=\delta_0(1-c\bar c)^2\,|\mu_0-c|^{-4}$$

и формулы (15), (16), (19), находим

$$p_1:p_0=\mu_1^2\mu_0^{-2}(1-c\bar c)^2|\mu_0-c|^4\left[\frac{\alpha-K\beta}{K\alpha-\beta}\cdot\frac{1-c\bar c}{(1-\bar c\,\mu_0)^2}\right]^{-2}.$$

Так как

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)_{w=\mu_0}=\left\{e^{i\varphi}\frac{1-c\bar c}{(1-\bar c\,\mu_0)^2}\right\}_{w=\mu_0}=\frac{\alpha-K\beta}{K\alpha-\beta}\cdot\frac{1-c\bar c}{(1-\bar c\,\mu_0)^2},$$

то

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial w}\right|_{w=\mu_0}=\frac{1-c\bar c}{|1-\bar c\,\mu_0|^2}$$

и, следовательно,

$$p_1:p_0=\mu_1^2\,\mu_0^{-2}\left[\left|\frac{\partial\omega}{\partial w}\right|:\frac{\partial\omega}{\partial w}\right]^2_{w=\mu_0}. \tag{20}$$

Но

$$\left\{\frac{\partial\omega}{\partial w}:\left|\frac{\partial\omega}{\partial w}\right|\right\}_{w=\mu_0}=\frac{\alpha-K\beta}{K\alpha-\beta}\cdot\frac{(1-\bar c\,\mu_0)\,(1-c\,\bar\mu_0)}{(1-\bar c\,\mu_0)^2}=$$

$$=e^{i\varphi}\,\bar\mu_0\frac{\mu_0-c}{1-\bar c\,\mu_0}=\bar\mu_0\mu_1=\mu_1\,\mu_0^{-1}.$$

На основании последнего из (20) находим

$$p_1=p_0.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$p_n=p_{n-1}$$

и, следовательно, выполнение равенства

$$p_n=p_0=-2m\,\delta_0\,\mu_0^2(\alpha-\beta)^2\lambda^{-1}(\mu_0-\alpha)^{-2}(\mu_0-\beta)^{-2}. \tag{21}$$

Таким образом, функция $\psi(y)$ является квазипериодической

$$\psi(y+2m\pi i)=\psi(y),\qquad \psi(y+m\log K)=\psi(y)+\frac{K'}{\lambda K}$$

с периодами

$$2\omega_1=m\log K,\qquad 2\omega_2=2m\pi i, \tag{22}$$

с простыми полюсами в точках $\eta_{n\nu}$ и с одинаковыми вычетами относительно этих полюсов.

3. Рассмотрим квазипериодическую функцию Вейерштрасса $\zeta(y)$

$$\zeta(y+2\omega_1)=\zeta(y)+2\eta_1,\qquad \zeta(y+2\omega_2)=\zeta(y)+2\eta_2,$$

которая имеет в качестве особых точек простые полюсы в точках

$$y=2n\omega_1+2\nu\omega_2$$

с равными единице вычетами. Тогда функция

$$G(y)=p\left[\zeta\left(y-m\log\lambda\frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\right)-\frac{\eta_2}{\omega_2}\left(y-m\log\lambda\frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\right)\right] \tag{23}$$

также будет квазипериодической с теми же периодами и удовлетворяет условиям

$$G(y+2\omega_1)=G(y)+p\frac{\pi i}{\omega_2},\qquad G(y+2\omega_2)=G(y)$$

и имеет простые полюсы в точках

$$m\log\lambda\frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}+n\,2\omega_1+\nu\,2\omega_2=\eta_{n\nu}$$

с равными p вычетами. Если дополнительно потребовать, чтобы

$$p\frac{\pi i}{\omega_2}=\frac{K'}{\lambda K}$$

или, что то же,

$$\lambda p:m=K^1:K, \tag{24}$$

то функции $\psi(y)$ и $G(y)$ имеют одни и те же простые полюсы с одинаковыми вычетами и не имеют других особых точек, и по известному свойству мероморфных функций могут отличаться разве лишь на постоянную

$$\psi(y)=G(y)+\text{const}. \tag{25}$$

Так как выражение $\lambda p:m$ чисто вещественное, то условию (24) можно удовлетворить путем соответствующего выбора параметра t. Для этого достаточно потребовать, чтобы новый параметр $\tau=\tau(t)$ удовлетворял условию

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{m}{p\lambda}\,\frac{d\log K}{dt}.$$

Возвращаясь теперь к функции $\boldsymbol{P}$ и определяя константу в (25) из условия $\boldsymbol{P}(0,t)=0$, получим искомое выражение для $\boldsymbol{P}(w,t)$

$$\boldsymbol{P}(w,t)=\lambda p\frac{(w-\alpha)\,(w-\beta)}{\alpha-\beta}\left\{\left[\zeta\left(m\log\lambda\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right)-\right.\right.$$

$$-m\log\lambda\frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big)-\frac{\eta_2}{\omega_2}\Big(m\log\lambda\frac{w-\alpha}{w-\beta}-$$

$$-m\log\lambda\frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big)\Big]-\Big[\zeta\Big(m\log\frac{\alpha(\mu_0-\beta)}{\beta(\mu_0-\alpha)}\Big)-$$

$$-\frac{\eta_2}{\omega_2}m\log\frac{\alpha(\mu_0-\beta)}{\beta(\mu_0-\alpha)}\Big]+\frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\lambda p\alpha\beta}\Big\}-$$

$$-\frac{(\beta'-\alpha')w+\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\alpha-\beta}. \qquad (26)$$

§ 2. Вывод уравнения

1. Обозначим через $\gamma(t)$ аффикс точки окружности $|w|=1$, которой в отображении $z=\Phi(w,t)$ соответствует фиксированная точка $z=1$. Так как точке $z=1$ не может соответствовать ни точка $w=\mu_n$, ни предельная для таких точек, то уравнение (2) имеет смысл и в точке $w=\gamma$. По определению

$$\Phi(\gamma(t),t)\equiv 1,$$

откуда

$$\Phi'_t(\gamma(t),t)+\Phi'_w(\gamma(t),t)\gamma'(t)=0.$$

Сравнивая последнее выражение с уравнением (2) при $w=\gamma$, получим дифференциальное уравнение для $\gamma(t)$:

$$\gamma'(t)=P(\gamma(t),t). \qquad (27)$$

2. Функция

$$u=\exp\left(im\log\lambda\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right),$$

$$\exp\left(im\log\lambda\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\right)=\exp(-m\pi), \qquad (28)$$

при соответствующем подборе вещественной постоянной m и комплексной константы λ, осуществляет отображение $|w|<1$ на круговое кольцо $R: r(t)<|u|<1$, где

$$r(t)=\exp(-m\pi) \qquad (29)$$

Действительно, дробно линейное преобразование

$$v=\lambda\frac{w-\alpha}{w-\beta}$$

при соответствующем подборе аргумента λ, переводит круг $|w|<1$ в верхнюю полуплоскость переменного v; функция $\omega=\log v$ отображает последнюю на полосу $0<Jm\,\omega<\pi$. Предельные точки α и β группы A перейдут в бесконечно удаленную точку плоскости ω и, следовательно, преобразованиям группы A в плоскости ω соответствует группа параллельных переносов, оставляющих инвариантной полосу $0<Jm\,\omega<\pi$. Далее, функция $\varkappa=im\,\omega$, при соответствующем подборе вещественной постоянной m, отобразит данную полосу на $-m\pi<Re\,\varkappa<0$ и так, что конгруентные точки будут отличаться друг от друга на слагаемое $n\cdot 2\pi i$, и, наконец, функция $u=\exp\varkappa$ отобразит полосу $-m\pi<Re\,\varkappa<0$ на кольцо $r(t)<|u|<1$, при этом так, что конгруентным относительно преобразований группы A точкам круга $|w|<1$ будет соответствовать одна и та же точка кольца. Находя итоговое преобразование, получим (28). Распоряжаясь еще величиной модуля λ, можно всегда удовлетворить и условию

$$\exp(-m\pi)=\exp\left(im\log\lambda\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\right),$$

то есть перевести точку $w=\gamma$ в точку внутренней окружности кольца, лежащую на положительной части вещественной оси. При этом всегда можно перевести точки $w=\mu_n$ в точку окружности $|u|=1$.

Преобразованию (4) в плоскости w соответствует полный поворот вокруг начала координат в плоскости u.

Тогда

$$u=\exp\left(im\log\lambda\frac{\omega-\alpha}{\omega-\beta}\right)=\exp\left(im\log\lambda K\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right)=$$

$$=\exp\left(im\log\lambda\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right)\cdot\exp im\log K.$$

Откуда

$$\exp(im\log K)=\exp(2\pi i)=1$$

и

$$m=2\pi:\log K, \qquad 2\omega_1=2m\log K=2\pi. \qquad (30)$$

Дифференцируя последнее соотношение по t и учитывая (24), находим

$$m'=-\lambda mp:2\pi. \qquad (31)$$

3. В уравнении (2) перейдем к переменному u и положим

$$\Phi(w,t)=\psi(u,t)$$

Имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+P(w,t)\frac{\partial u}{\partial w}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial u}=0. \qquad (32)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t}+P(w,t)\frac{\partial u}{\partial w}=B=iu\left\{m'\log\lambda\frac{w-\alpha}{w-\beta}+m\frac{\lambda'}{\lambda}+\right.$$

$$\left.+m\frac{(\beta'-\alpha')w+\alpha'\beta-\beta'\alpha}{(w-\alpha)(w-\beta)}+\frac{m(\alpha-\beta)}{(w-\alpha)(w-\beta)}P(w,t)\right\}. \qquad (33)$$

Упростим это выражение. Для этого найдем сначала $(\log\lambda)'$. Из равенства (28) имеем

$$\log \lambda \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \pi i,$$

откуда

$$\log \lambda = \log \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} + \pi i \tag{34}$$

Дифференцируя его по t и используя соотношение (27), (26) и (28), будем иметь

$$(\log\lambda)' = -\lambda p \Big[\zeta\Big(m\pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) -$$

$$- \frac{\eta_2}{\omega_2} m \Big(\pi i - \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big)\Big] + \lambda p \Big[\zeta\Big(m \log \frac{\alpha(\mu_0-\beta)}{\beta(\mu_0-\alpha)}\Big) -$$

$$- \frac{\eta_2}{\omega_2} m \log \frac{\alpha(\mu_0-\beta)}{\beta(\mu_0-\alpha)}\Big] + \frac{\beta'\alpha-\alpha'\beta}{\alpha\beta}. \tag{35}$$

Подставляя теперь в (33) найденные значения производных из (31) и (35), используя выражение (26) и почти очевидное равенство

$$m' - m^2 p \lambda \frac{\eta_2}{\omega_2} = -\frac{\lambda p m_2}{m\pi^2 i}\Big(\frac{\pi i}{2} + \omega_1\eta_2\Big) = -\lambda p m^2 \frac{\eta_1}{\omega_1},$$

получим

$$B = iu\lambda pm \Big\{ \zeta\Big(m \log \lambda \frac{w-\alpha}{w-\beta} - m \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) -$$

$$- \frac{\eta_1}{\omega_1} m \Big(\log \lambda \frac{w-\alpha}{w-\beta} - \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) -$$

$$- \Big[\zeta\Big(m\pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) - \frac{\eta_2}{\omega_2} m \Big(\pi i - \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big)\Big] -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big\}. \tag{36}$$

Используем еще известное разложение функции $\zeta(v)$ ([5], стр. 78)

$$\zeta(v) = \frac{\eta_1}{\omega_1} v + \frac{\pi i}{2\omega_1}\Big\{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2h^{2n}\varkappa^{-1}}{1-h^{2n}\varkappa^{-1}} -$$

$$- \frac{2h^{2n}\varkappa}{1-h^{2n}\varkappa}\Big)\Big\}, \tag{37}$$

где

$$\varkappa = \exp\Big(\frac{\pi i}{\omega_2} v\Big), \tag{38}$$

$$h = \exp\Big(\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}\Big), \qquad Jm \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0. \tag{39}$$

Имеем

$$\zeta\Big(m \log \lambda \frac{w-\alpha}{w-\beta} - m \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) -$$

$$- \frac{\eta_1}{\omega_1} m \Big(\log \lambda \frac{w-\alpha}{w-\beta} - \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) =$$

$$= \frac{\pi i}{2\pi}\Big\{\frac{\nu u+1}{\nu u-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2r^{2n}\nu^{-1}u^{-1}}{1-r^{2n}\nu^{-1}u^{-1}} - \frac{2r^{2n}\nu u}{1-r^{2n}\nu u}\Big)\Big\} =$$

$$= -\frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+r^{2n}\nu u}{1-r^{2n}\nu u}, \tag{40}$$

где, согласно формуле (38) и (39),

$$\varkappa = \exp\Big[\frac{\pi i}{\omega_1} m \Big(\log \lambda \frac{w-\alpha}{w-\beta} - \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big)\Big] = u\nu$$

и

а

$$\nu = \exp\Big(im \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big), \tag{41}$$

аффикс точки окружности $|u|=1$, соответствующей в отображении (28) точкам $w=\mu_n$;

$$h = \exp\Big(\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}\Big) = \exp\Big(\pi i \frac{m\pi i}{\pi}\Big) = \text{ex}\quad -m\pi) = r.$$

Далее, вводя в рассмотрение новую пару основных периодов

$$\omega_1' = \omega_2, \qquad \omega_2' = -\omega_1; \qquad Jm \frac{\omega_2}{\omega_2'} = -Jm \frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$$

и учитывая, что

$$\eta_1' = \zeta(\omega_1') = \eta_2,$$

получим

$$\zeta\Big(m\pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) - \frac{\eta_2}{\omega_2}\Big(m\pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0-\alpha}{\mu_0-\beta}\Big) =$$

$$= \frac{\pi i}{2m\pi i}\Big\{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2h^{2n}\varkappa^{-1}}{1-h^{2n}\varkappa^{-1}} - \frac{2h^{2n}\varkappa}{1-h^{2n}\varkappa}\Big)\Big\}, \tag{42}$$

где

$$h = \exp\Big(\pi i \frac{\omega_2'}{\omega_1'}\Big) = \exp\Big(-\frac{\pi}{m}\Big)$$

и $$\varkappa = \exp\left[\frac{\pi i}{m \pi i} \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \right] = - \frac{\mu_0 - \beta}{\lambda (\mu_0 - \alpha)} .$$

Из (41) следует, что
$$\log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} ,$$
а следовательно, $\varkappa$ и все выражения (42) чисто вещественные.

Возвращаясь к уравнению (32) и используя формулу (40), получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \left\{ \frac{\lambda p m}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + r^{2n} \nu u}{1 - r^{2n} \nu u} - i \lambda \, mp \left[\zeta \left(m \pi i - \right.\right.\right.$$
$$\left. - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \frac{\eta_2}{\omega_2} m \left(\pi i - \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \Bigg] -$$
$$\left. - i \frac{\lambda p m}{2\pi} \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0.$$

Так как два вторых слагаемых коэффициента последнего уравнения принимают чисто мнимые значения, то поворотом около начала координат
$$v = u \exp i \Theta, \qquad \psi(u,t) = \chi(v,t),$$
где
$$\frac{d \Theta}{d t} = \lambda p m \left[\zeta \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \right.$$
$$- \frac{\eta_2}{\omega_2} \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) +$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi} \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right] ,$$
приведем дифференциальное уравнение к виду
$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + r^{2n} \vartheta v}{1 - r^{2n} \vartheta v} \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0, \tag{43}$$
где
$$\vartheta = \nu \exp(- i \Theta), \qquad |\vartheta| = 1.$$

4. Функция
$$\Psi(v, t) = [1 - \bar{z}_0 \chi(v,t)] : [\chi(v,t) - z_0]$$
будет удовлетворять уравнению (43) и отображает кольцо $r < |v| < 1$, на область, получаемую из внешности единичного круга проведением разреза по кривой, уходящей одним концом в бесконечность.

Обозначим через $r . \exp i \varphi$ точку внутренней окружности кольца, которой в отображении $z = \Psi(v, t)$ соответствует точка $z = 1$. Произведя еще в уравнении (43) замену переменных

$$u = v : (r \exp i \varphi),$$
$$\Psi(v, t) = g(u, t), \qquad g(1, t) = 1$$
и учитывая, что
$$\frac{d}{dt} \left(r e^{i\varphi} \right) = \frac{m p \lambda}{2} r e^{i\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + r^{2n+1} \vartheta \exp i \varphi}{1 - r^{2n+1} \vartheta \exp i \varphi} ,$$
получим
$$\frac{dg}{dt} + u \frac{m p \lambda}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1 + r^{2n+1} k u}{1 - r^{2n+1} k u} - \frac{1 + r^{2n+1} k}{1 - r^{2n+1} k} \right\} \frac{dg}{du} = 0 \tag{44}$$
$$k = \vartheta \exp i \varphi .$$
При этом всегда можно добиться (введением нового параметра), что
$$\left\{ \ln r(t) \right\}' = \frac{\lambda p m}{2} = 1 .$$
Переходя, наконец, к функции
$$f(u, t) = g^{-1} \{ g(u, t_1), t \} ,$$
получим искомое уравнение (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Komatu U., Untersuchungen über konforme Abbildung zweifachzusammenhängender Bereiche, Proc. Phys. — Math. Soc. Japan, 25(1943), 1—42.
2. Голузин Г. М., О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце. „Матем. сб". 29 (1951), 469—476.
3. Куваев М. Р. и Куфарев П. П., Об уравнении типа Левнера для многосвязных областей. Уч. зап. Томского гос. ун-та 25 (1955), 19—34.
4. Куваев М. Р., Обобщение уравнения типа Левнера для автоморфных функций, Труды Томского гос. ун-та, т. 144, 1959, 27—30.
5. Ахиезер А.И., Элементы теории эллиптических функций, ГТИ, 1948.

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева