ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 200 1968

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ОДНОЛИСТНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

П. П. КУФАРЕВ, В. В. СОБОЛЕВ, Л. В. СПОРЫШЕВА

Ранее П. П. Куфаревым [7] был предложен метод изучения экстремальных задач для функций, однолистных в круге, в котором объединяются вариационный метод и метод параметрических представлений. Метод нашел применение в некоторых работах ([6] и др).

В данной статье доказывается возможность распространения указанного метода на исследование экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости. Метод демонстрируется на задаче об экстремуме функционала $I = \mathrm{Re}\,[e^{i\alpha} f(w_0)]$, $\mathrm{Im}\, w_0 > 0$ при условии, что $\mathrm{Im}\, f(w_0) = K$ фиксировано на классе H функций $z = f(w)$, голоморфных и однолистных в полуплоскости $\mathrm{Im}\, w > 0$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{w\to\infty,\ \mathrm{Im}\, w > 0} [f(w) - w] = 0$$

и отображающих полуплоскость $\mathrm{Im}\, w > 0$ на области, принадлежащие $\mathrm{Im}\, z > 0$.

§ 1. Формула Шварца для полуплоскости. Пусть $\varphi(w)$—функция, голоморфная в верхней полуплоскости $\mathrm{Im} w > 0$, непрерывная в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\, w \geqslant 0$, и

$$\lim_{w\to\infty,\ \mathrm{Im}\, w > 0} \varphi(w) = 0. \tag{1.1}$$

Тогда

$$\varphi(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\, \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi - w}, \quad \mathrm{Im}\, w > 0, \tag{1.2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\, \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi - w} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{Im}\, \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi - w}. \tag{1.3}$$

Доказательство этой теоремы (при указанных выше предположениях) может быть выполнено, по существу, так же, как в [1] (см. стр. 287—288).

Из этой теоремы тотчас следует, что если условие (1.1) заменить требованием

$$\lim_{w\to\infty,\ \mathrm{Im}\, w \geqslant 0} [\varphi(w) - P(w)] = 0, \tag{1.4}$$

где $P(w)$ — некоторый полином с вещественными коэффициентами, то при $\mathrm{Im}\, w > 0$ имеет место формула

$$\varphi(w) = P(w) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\, \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi - w}. \tag{1.5}$$

§ 2. Уравнение Левнера для полуплоскости. Пусть Γ—разрез по кривой Жордана

$$z = \Psi(t), \quad z \leqslant t \leqslant \tau_0, \tag{2.1}$$

лежащий в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$, за исключением его конца $z = \Psi(\tau_0)$, находящегося на вещественной оси $\mathrm{Im} z = 0$; Γ_τ — часть кривой Γ—

$$z = \Psi(t), \quad z \leqslant t \leqslant \tau_0; \tag{2.2}$$

B_τ — область, полученная из полуплоскости $\mathrm{Im} z > 0$ исключением разреза Γ_τ;

$$z = \Phi(w, \tau) \tag{2.3}$$

—функция класса H, отображающая полуплоскость $\mathrm{Im} w > 0$ на область B_τ;

$$w = F(z, \tau) \tag{2.4}$$

—функция, обратная для $z = \Phi(w, \tau)$ x). Обозначим еще через $\mu(\tau)$ точку на вещественной оси $\mathrm{Im}\, w = 0$, которая при отображении $z = \Phi(w, \tau)$ соответствует концу разреза $z = \Psi(\tau)$.

Так как функция $z = \Phi(w, \tau)$ по принципу симметрии Шварца может быть в окрестности точки $w = \infty$ аналитически продолжена в нижнюю полуплоскость, то в некоторой окрестности точки $w = \infty$ она разлагается в ряд Лорана вида

$$z = \Phi(w, \tau) = w + \frac{c_{-1}(\tau)}{w} + \frac{c_{-2}(\tau)}{w^2} + \ldots \tag{2.5}$$

Функция $w = F(z, \tau)$ в некоторой окрестности точки $z = \infty$ допускает разложение в ряд вида

$$w = F(z, \tau) = z - \frac{c_{-1}(\tau)}{z} + \frac{d_{-2}(\tau)}{z^2} + \ldots \tag{2.6}$$

Введем еще в рассмотрение функцию

$$\omega = h(w, \tau', \tau'') = F(\Phi(w, \tau'), \tau''), \quad 0 \leqslant \tau' < \tau'' \leqslant \tau_0, \tag{2.7}$$

разложение которой в некоторой окрестности точки $w = \infty$ имеет вид

$$\omega = h(w, \tau', \tau'') = w + \frac{c_{-1}(\tau') - c_{-1}(\tau'')}{w} + \ldots \tag{2.8}$$

Она конформно и однолистно отображает полуплоскость $\mathrm{Im} w > 0$ на область, полученную из полуплоскости $\mathrm{Im}\, \omega > 0$ проведением некоторого разреза $S_{\tau'\tau''}$, начинающегося в точке $\omega = \mu(\tau'')$; разрезу $S_{\tau'\tau''}$ в плоскости ω при отображении $\omega = h(w, \tau', \tau'')$ соответствует

x) Отметим, что условие $\lim\limits_{w\to\infty,\ \mathrm{Im}\, w >} [\Phi(w, \tau) - w] = 0$ принадлежности функции $\Phi(w, \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, классу H обеспечивает единственность выбора этой функции.

отрезок $B_{\tau'\tau''}$: $a \leqslant w \leqslant b$ вещественной оси плоскости w, содержащий точку $w = \nu(\tau')$.

С помощью формулы Шварца (1.5) при $P(w) = w$ получаем

$$h(w, \tau', \tau'') = w + \frac{1}{\pi}\int_a^b \operatorname{Im} h(\xi, \tau', \tau'') \frac{d\xi}{\xi - w}. \tag{2.9}$$

Далее, подставляя сюда $w = F(z, \tau')$, находим

$$F(z, \tau'') - F(z, \tau') = \frac{1}{\pi}\int_a^b \operatorname{Im} h(\xi, \tau', \tau'') \frac{d\xi}{\xi - F(z, \tau')} \tag{2.10}$$

и

$$c_{-1}(\tau') - c_{-1}(\tau'') = \lim_{z\to\infty} z\,[F(z, \tau'') - F(z, \tau')] = -\frac{1}{\pi}\int_a^b \operatorname{Im} h(\xi, \tau', \tau'')\, d\xi. \tag{2.11}$$

Из последней формулы видно, что $c_{-1}(\tau)$ — строго монотонно возрастающая функция от τ. То, что при $\tau'' \to \tau' = \tau$ или $\tau' \to \tau'' = \tau$ обе дуги $B_{\tau'\tau''}$ и $S_{\tau'\tau''}$ стягиваются в точку $\nu(\tau)$ и $c_{-1}(\tau)$ и $\nu(\tau)$ — непрерывные функции параметра τ, доказывается совершенно аналогично тому, как это сделано, например, в [2] (см. стр. 113—117). После этого, выбирая параметр τ так, чтобы имело место равенство

$$c_{-1}(\tau) = \tau + \text{const} \tag{2.12}$$

(что возможно в силу монотонности функции $c_{-1}(\tau)$, и выполняя также аналогично [2] предельный переход $\tau'' \to \tau' = \tau$ или $\tau' \to \tau'' = \tau$, докажем, что функция $F(z, \tau)$ удовлетворяет уравнению типа Левнера

$$\frac{\partial F(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\nu(\tau) - F(z, \tau)}, \tag{2.13}$$

а обратная ей функция — уравнению

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\mu - w} \cdot \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} = 0. \tag{2.14}$$

Уравнения (2.13), (2.14) ранее иным путем были получены Н. В. Поповой [4] (выбор параметра τ ею не был, однако, указан).

§ 3. Вывод одного неравенства. Обозначая $F(z, \tau) = X + iY$, где X и Y соответственно вещественная и мнимая части $F(z, \tau)$, из уравнения (2.13) имеем (опуская для простоты записи обозначение зависимости функций от их аргументов):

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{Y}{|\mu - F|^2}. \tag{3.1}$$

Отсюда видно, что при $Y > 0$ $\dfrac{dY}{d\tau}$ также больше нуля, следовательно, $Y(\tau) = \operatorname{Im} F(z, \tau)$ при фиксированном z возрастает при возрастании τ. Далее, дифференцируя (2.13) по z, находим

$$\frac{\partial \log F'_z}{\partial \tau} = \frac{1}{(\nu - F)^2}. \tag{3.2}$$

Из (3.2) и (3.1) получаем делением (при фиксированном z):

$$\frac{d \log F'_z}{dY} = \frac{(\nu - \bar{F})^2}{|\mu - F|^2} \cdot \frac{1}{Y},$$

откуда следует, что

$$-\frac{dY}{Y} \leqslant d \log |F'_z| \leqslant \frac{dY}{Y},$$

и интегрированием находим, учитывая еще, что $F(z, \tau_0) = z$:

$$\log \frac{Y}{\operatorname{Im} z} \leqslant \log \frac{1}{|F'_z|} \leqslant \log \frac{\operatorname{Im} z}{Y}.$$

Обозначая здесь $z = \Phi(w, \tau)$, $w = F(z, \tau)$ и учитывая, что $F'_z = \dfrac{1}{\Phi'_w}$, находим неравенства

$$\frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} \Phi(w, \tau)} \leqslant |\Phi'_w(w, \tau)| \leqslant \frac{\operatorname{Im} \Phi(w, \tau)}{\operatorname{Im} w}. \tag{3.3}$$

Так как всякую функцию $f(w)$ класса H можно аппроксимировать интегралами уравнения (2.14), то и для функций этого класса справедливы неравенства:

$$\frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} f(w)} \leqslant |f'(w)| \leqslant \frac{\operatorname{Im} f(w)}{\operatorname{Im} w}. \tag{3.4}$$

§ 4. Теорема 1. Пусть задано семейство областей $B(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, которое при $t \to t_0$ сходится как к ядру (относительно некоторой фиксированной точки z_0, $\operatorname{Im} z_0 > 0$) к верхней полуплоскости $B(t_0)$. Пусть, далее, граница $\Gamma(t)$ каждой области $B(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\Gamma(t)$ есть простая кривая Жордана *):
$$z = \Omega(\lambda, t), \quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty.$$
2. $\max |\Omega(\lambda, t) - \Omega(\lambda, t_0)| \to 0$ при $t \to t_0$.
3. $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \Omega(\lambda, t) = \infty$.

Пусть при $0 < t < t_0$, $-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty$ задана вещественная функция $f(\lambda, t)$, непрерывная по λ и равномерно относительно λ непрерывная по t при $t = t_0$, для которой $f(-\infty, t) = f(\infty, t) = 0$.

Определим для каждого значения t функцию $u(z, t)$, гармоническую и ограниченную в области $B(t)$, принимающую на $\Gamma(t)$ при $z = \Omega(\lambda, t)$ значения $f(\lambda, t)$.

Тогда $u(z, t)$ равномерно относительно z внутри $B(t_0)$ непрерывна по t при $t = t_0$.

Доказательство аналогичной теоремы для случая, когда область $B(t_0)$ есть круг $|z| < 1$, выполнено в [3]. Для рассматриваемого случая, когда область $B(t_0)$ есть полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, это доказательство может быть выполнено путем отображения верхней полуплоскости плоскости z, в которой построены области $B(t)$, на круг и затем применением указанной выше теоремы. Конечно, доказательство может быть выполнено и непосредственно, без применения

*) Под простой кривой Жордана, лежащей в расширенной плоскости, мы будем понимать такую кривую, стереографическая проекция которой на сферу Римана представляет из себя простую кривую Жордана в обычном смысле.

10. Заказ 4092.

конформного отображения, с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [3].

§ 5. Теорема 2 (о равномерной дифференцируемости). Пусть семейство односвязных областей $B(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Граница $\Gamma(t)$ области $B(T)$ — простая кривая Жордана

$$z = \Omega(\lambda, t), \quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty,$$

для которой

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} [\Omega(\lambda, t) - \lambda] = 0.$$

2. Области $B(t)$ сходятся как к ядру относительно некоторой точки $z_0 \in B(t_0)$ к области $B(t_0)$ при $t \to t_0$, $t_0 \in [a, b]$.

3. Функция $z = \Omega(\lambda, t)$ равномерно относительно λ дифференцируема по t при $t = t_0$, $t_0 \in [a, b]$.

4. Кривая $\Gamma(t_0)$ — аналитическая*).

Пусть, далее, $w = F(z, t)$ — функция, отображающая $B(t)$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{z \to \infty,\ z \in B(t)} [F(z, t) - z] = 0^{**}),$$

и $z = \Phi(w, t)$ — обратная функция, которая удовлетворяет тогда условию

$$\lim_{w \to \infty,\ \operatorname{Im} w > 0} [\Phi(w, t) - w] = 0.$$

Тогда функция $w = F(z, t)$ равномерно относительно z внутри $B(t_0)$ дифференцируема по t при $t = t_0$, а функция $z = \Phi(w, t)$ равномерно относительно w внутри верхней полуплоскости дифференцируема по t при $t = t_0$. При этом имеют место формулы:

$$\left[\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\left[\frac{\partial F(\Omega(\lambda,t),t_0)}{\partial t}\right]_{t=t_0} \cdot \frac{d\xi}{\xi - F(z,t_0)}, \tag{5.1}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = \frac{\partial \Phi(w,t_0)}{\partial w} \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{\left[\dfrac{\partial \Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}}{\left[\dfrac{\partial \Phi(w,t_0)}{\partial w}\right]_{w=\xi}} \cdot \frac{d\xi}{\xi - w}. \tag{5.2}$$

Доказательство 1. Проведем сначала доказательство формулы (5.1) для случая, когда $B(t_0)$ есть верхняя полуплоскость, то есть

$$F(z, t_0) = z, \quad \Phi(w, t_0) = w.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z, t) = i[F(z,t) - z] = P(z,t) + iQ(z,t), \tag{5.3}$$

*) Уточним смысл этого условия. Именно, мы будем требовать, чтобы функция, конформно отображающая круг $|\omega| < 1$, $\omega = e^{i\alpha}\dfrac{w - w_0}{w - \overline{w}_0}$, $w = F(z, t_0)$, $w_0 = F(z_0, t_0)$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, на область $B(t_0)$ была аналитически продолжаема в некоторый круг, содержащий $|\omega| < 1$ и касающийся последнего извне в точке $\omega = e^{i\alpha}$.

**) Нетрудно убедиться, что условие 1 формулируемой теоремы обеспечивает возможность и единственность такого выбора функции $F(z, t)$ (см. сноску на стр. 2).

где через $P(z,t)$ и $Q(z,t)$ обозначены соответственно вещественная и мнимая части функции $\varphi(z,t)$. Заметим, что

$$\varphi(z, t_0) = 0.$$

Полагая $F(z,t) = X(z,t) + iY(z,t)$, $z = x + iy$, имеем

$$\operatorname{Re}\varphi(z,t) = \operatorname{Re}\{i[X(z,t) + iY(z,t) - x - iy]\} = y - Y(z,t),$$
$$\operatorname{Im}\varphi(z,t) = X(z,t) - x.$$

Но так как функция $w = F(z,t)$ отображает область $B(t)$ на верхнюю полуплоскость, то при $z = \Omega(\lambda, t)$ $\operatorname{Im} F(z,t) = Y(z,t) = Y(\Omega(\lambda,t),t) = 0$. Потому

$$\operatorname{Re}\varphi(\Omega(\lambda,t),t) = y = \operatorname{Im}\Omega(\lambda,t).$$

Введем теперь вещественную функцию $f(\lambda, t)$ следующими равенствами:

$$f(\lambda, t) = \frac{\operatorname{Im}\Omega(\lambda,t)}{t - t_0} = \operatorname{Im}\frac{\Omega(\lambda,t) - \Omega(\lambda,t_0)}{t - t_0} \quad \text{при } t \neq t_0,$$

$$f(\lambda, t_0) = \operatorname{Im}\left[\frac{\partial\Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}.$$

Область $B(t)$ и функция $f(\lambda,t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. По этой теореме гармоническая функция

$$u(z,t) = \frac{P(z,t)}{t - t_0} = \frac{P(z,t) - P(z,t_0)}{t - t_0},$$

принимающая на $\Gamma(t)$ при $z = \Omega(\lambda,t)$ значения $f(\lambda,t)$, равномерно относительно z внутри верхней полуплоскости непрерывна по t при $t = t_0$. Таким образом, в рассматриваемом случае доказано существование производной $\left[\dfrac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ и равномерная относительно z внутри полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ дифференцируемость по t при $t = t_0$ функции $P(z,t)$ и, следовательно*), самой функции $\varphi(z,t)$, причем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = \left[\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = u(z,t_0) \tag{5.4}$$

— гармоническая в $\operatorname{Im} z > 0$ функция.

Введем еще в рассмотрение функцию

$$\Psi(z,t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial P(\Omega(\lambda,t),t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} \cdot \frac{d\xi}{\xi - z} =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\left[\frac{\partial\varphi(\Omega(\lambda,t),t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} \cdot \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\left[\frac{\partial\Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} \times$$

*) Это можно показать точно так же, как в [3] (стр. 110—111), используя возможность представления внутри $\operatorname{Im} z > 0$ функции $\varphi(z,t)$ через значения $P(\zeta,t)$, принимаемые ее вещественной частью $P(z,t)$ на границе γ_ζ круга $|\zeta - z| < \zeta$ (ζ — достаточно мало) интегралом Шварца по γ_ζ, и применения к нему правила дифференцирования по параметру.

$$\times \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, t_0)\,\frac{d\xi}{\xi - z}\,. \tag{5.5}$$

Так как $f(\lambda, t_0)=0$ при $\xi=\pm\infty$, то, если понимать здесь интеграл в смысле главного значения, этот интеграл представляет аналитическую в верхней полуплоскости функцию, вещественняя часть которой равна гармонической в $\operatorname{Im} z>0$ функции, принимаюащей на границе значения $f(\lambda, t_0)$, совпадающей, таким образом, с $\left[\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$.

Итак,

$$\operatorname{Re}\Psi(z,t_0)=\left[\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=u(z,t_0). \tag{5.6}$$

Кроме того, так как вместе с $P(z,t)$ функция $\varphi(z,t)=P(z,t)+iQ(z,t)$ равномерно внутри $\operatorname{Im} z>0$ дифференцируема по t при $t=t_0$, то и функция $Q(z,t)$ равномерно внутри $\operatorname{Im} z>0$ дифференцируема по t при $t=t_0$, причем $\left[\frac{\partial Q(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ является функцией гармонически сопряженной с $\left[\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$. Следовательно, введенная ранее аналитическая функция $\Psi(z,t_0)$, имеющая, согласно (5.6), вещественной частью $\left[\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$, совпадает с $\left[\frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$. Итак, принимая во внимание (5.5), имеем

$$\left[\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\partial\Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}\cdot\frac{d\xi}{\xi-z}\,.$$

Но, согласно (5.3), $F(z,t)=-i\varphi(z,t)+z$. Поэтому $F(z,t)$ также равномерно относительно z внутри $\operatorname{Im} z>0$ дифференцируема по t при $t=t_0$ и имеет место равенство:

$$\left[\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=-i\left[\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\times\left[\frac{\partial\Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}\cdot\frac{d\xi}{\xi-z}\,. \tag{5.7}$$

Формула (5.1) в частном случае, когда $B(t_0)$ верхняя полуплоскость, таким образом, доказана.

2. Переходим теперь к рассмотрению общего случая, когда $B(t_0)$ — произвольная указанная в теореме область. Совершим отображение $\xi=F(z,t_0)$ области $B(t_0)$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\xi>0$. В силу условия 4 теоремы (см. сноску на стр. 146) функция $z=\Phi(\xi,t_0)$, обратная к $\xi=F(z,t_0)$, допускает аналитическое продолжение в некоторую полосу $-h\leqslant\operatorname{Im}\xi<0$, $h>0$, и, значит, функция $\xi=F(z,t_0)$ аналитически продолжаема через кривую $\Gamma(t_0)$ в некоторую окрестность последней. Легко видеть, что при отображении $\xi=F(z,t_0)$ семейство областей $B(t)$, $t\in[a,b]$, при значениях t, достаточно близких к t_0, переходит в семейство близких к полуплоскости $\operatorname{Im}\xi>0$ областей $\tilde B(t)$ с границами $\tilde\Gamma(t)$, сходящееся как к ядру к верхней

полуплоскости $\tilde B(t_0)$ при $t\to t_0$ и удовлетворяющее всем условиям теоремы. Уравнение границы $\tilde\Gamma(t)$ области $\tilde B'(t)$ имеет вид:

$$\tilde\Omega(\lambda,t)=F(\Omega(\lambda,t),t_0). \tag{5.8}$$

Таким образом, для функции $w=\tilde F(\xi,t)$, отображающей область $\tilde B(t)$ на верхнюю полуплоскость, будет справедлива уже доказанная формула (5.7), причем функция $\tilde F(\xi,t)$ равномерно относительно ξ внутри $\operatorname{Im}\xi>0$ дифференцируема по t при $t=t_0$. Но

$$F(z,t)=\tilde F(F(z,t_0),t), \tag{5.9}$$

поэтому функция $F(z,t)$ равномерно относительно z внутри $B(t_0)$ дифференцируема по t при $t>t_0$, причем, согласно (5.9), имеет место равенство:

$$\left[\frac{\partial F(\zeta,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=\left[\frac{\partial\tilde F(\xi,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0},\quad \xi=F(z,t_0). \tag{5.10}$$

Применяя к функции $\tilde F(\xi,t)$ формулу (5.7), получаем с учетом (5.8) формулу

$$\left[\frac{\partial\tilde F(\xi,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\partial\tilde\Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}\cdot\frac{d\xi}{\xi-\zeta}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\partial F(\Omega(\lambda,t),t_0)}{\partial t}\right]_{t=t_0}\cdot\frac{d\xi}{\xi-\zeta}\,,$$

которая после подстановки $\zeta=F(z,t_0)$, как видно из (5.10), обращается в (5.1).

3. Далее, аналогично тому, как это показано в [3], можно доказать, что функция $z=\Phi(w,t)$, конформно отображающая полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ на область $B(t)$, равномерно относительно w внутри $\operatorname{Im} w>0$ дифференцируема по t при $t=t_0$, и имеет место формула

$$\left[\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=-\frac{\partial\Phi(w,t_0)}{\partial w}\cdot\left[\frac{\partial F(\Phi(w,t_0),t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}.$$

Отсюда с учетом (5.1) имеем

$$\left[\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=\frac{\partial\Phi(w,t_0)}{\partial w}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{\partial F(\Omega(\lambda,t),t_0)}{\partial t}\right]_{t=t_0}\cdot\frac{d\xi}{\xi-w}=$$

$$=\frac{\partial\Phi(w,t_0)}{dw}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\left\{\left[\frac{\partial F(z,t_0)}{\partial z}\right]_{z=\Omega(\lambda,t_0)}\cdot\left[\frac{\partial\Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}\right\}\cdot\frac{d\xi}{\xi-w}\,,$$

что равносильно формуле (5.2).

Теорема доказана.

§ 6. Теорема 3. Пусть функция $z=f(w)\in H$, классу функций $z=f(w)$, голоморфных и однолистных в полуплоскости $\operatorname{Im} w>0$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{w\to\infty,\ \mathrm{Im}\,w>0}[f(w)-w]=0$$

и отображающих $\mathrm{Im}\,w>0$ на области, принадлежащие также верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z>0$. Пусть, далее, функция

$$f(w)+tq(w)$$

голоморфна и однолистна при $0\leqslant t\leqslant T$ в некоторой полосе $0<\mathrm{Im}\,w<h$, $h>0$ и отображает эту полосу на область, ограниченную континуумами $D_0(t)$ и $D_h(t)$, причем $D_0(t)$ — континуум, соответствующий при отображении вещественной оси $\mathrm{Im}\,w=0$. Будем считать еще, что при больших $|w|$ в полосе $0<\mathrm{Im}\,w\leqslant h$ выполняется неравенство

$$|q(w)|\leqslant\frac{C}{|w|^{\alpha}},\quad C=\mathrm{const},\ \alpha>0. \tag{6.1}$$

Тогда функция $z=\Phi(w,t)$, $\lim_{w\to\infty,\ \mathrm{Im}\,w>0}[\Phi(w,t)-w]=0$, отображающая верхнюю полуплоскость на $B(t)$, граница которой есть $D_0(t)$, представима внутри полуплоскости $\mathrm{Im}\,w>0$ в виде

$$\Phi(w,t)=f(w)+tf'(w)P(w)+o(t), \tag{6.2}$$

где

$$P(w)=\lim_{\beta\to0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\right]\frac{dx}{\xi-w},\quad \xi=x+i\beta. \tag{6.3}$$

Доказательство. Зафиксируем в плоскости w произвольный компакт K, целиком лежащий в полуплоскости $\mathrm{Im}\,w>0$. Выберем такие $b>0$ и $R_0>0$, чтобы круговой сегмент $S=\{w:\mathrm{Im}\,w\geqslant b,\ |w|\leqslant R_0\}$ покрывал компакт K.

Условимся при всяком вещественном a прямую $\mathrm{Im}\,w=a$ обозначать через C_a (при этом предполагается, что ориентация ее такова, что положительному направлению соответствует направление роста $\mathrm{Re}\,w=x$, $-\infty\leqslant x\leqslant\infty$).

Обозначим через $\Gamma_\beta(t)$ кривую, в которую прямая C_β, $0<\beta<b$ отображается функцией $f(w)+tq(w)$, и через $G_\beta(t)$ — область, ограниченную кривой $\Gamma_\beta(t)$ и содержащуюся (при малых t) в верхней полуплоскости. Уравнение кривой $\Gamma_\beta(t)$ можно записать в виде

$$z=\Omega(\lambda,t)=f(x+i\beta)+tq(x+i\beta). \tag{6.4}$$

Для любого $\tau\in[0,T]$ при $t\to\tau$ семейство областей $G_\beta(t)$ сходится как к ядру (относительно некоторой точки z_0 верхней полуплоскости с достаточно большой $\mathrm{Im}\,z_0$) к области $G_\beta(\tau)$ и функция $\Omega(\lambda,t)$ удовлетворяет условиям теоремы о равномерной дифференцируемости (с заменой t_0 на τ). Потому для функции $\Phi_\beta(w,t)$, отображающей полуплоскость $\mathrm{Im}\,w>\beta$ на $G_\beta(t)$, будет справедливо равенство

$$\left[\frac{\partial\Phi_\beta(w,t)}{\partial t}\right]_{t=\tau}=\frac{\partial\Phi_\beta(w,\tau)}{\partial w}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{C_\beta}\mathrm{Im}\,\frac{\left[\dfrac{\partial\Omega(\lambda,t)}{\partial t}\right]_{t=\tau}}{\left[\dfrac{\partial\Phi_\beta(w,\tau)}{\partial w}\right]_{w=\xi}}\cdot\frac{d\xi}{\xi-w}. \tag{6.5}$$

Интегрируя это равенство по τ от $\tau=0$ до $\tau=t$ и учитывая, что $\Phi_\beta(w,0)=f(w)$, $\dfrac{\partial\Omega(\lambda,t)}{\partial t}=q(x+i\beta)$, получим

$$\Phi_\beta(w,t)=f(w)+tf'(w)\cdot\frac{1}{\pi}\int_{C_\beta}\mathrm{Im}\left[\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\right]\cdot\frac{d\xi}{\xi-w}+\gamma, \tag{6.6}$$

где

$$\gamma=\frac{1}{\pi}\int_0^t\left\{\frac{\partial\Phi_\beta(w,\tau)}{\partial w}\int_{C_\beta}\mathrm{Im}\left[\frac{q(\xi)}{\Phi'_\beta(\xi,\tau)}\right]\cdot\frac{d\xi}{\xi-w}-f'(w)\int_{C_\beta}\mathrm{Im}\left[\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\right]\frac{d\xi}{\xi-w}\right\}d\tau. \tag{6.7}$$

Покажем, прежде всего, что при $w\in K$ существует

$$\lim_{\beta\to0}\frac{1}{\pi}\int_{C_\beta}\mathrm{Im}\left[\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\right]\frac{d\xi}{\xi-w},$$

который мы обозначим через $P(w)$. Для этого представим интеграл

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{C_\beta}\mathrm{Im}\left[\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\right]\frac{d\xi}{\xi-w} \tag{6.8}$$

в следующем виде

$$I=I_1-I_2, \tag{6.9}$$

где обозначено

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\beta}\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi-w};\quad I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\beta}\overline{\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}}\cdot\frac{d\xi}{\xi-w}. \tag{6.10}$$

Фиксируем $b_0>0$, $b_0<b$, выбирая его одинаковым для всех β. Так как $\beta\to0$, можно считать, что $b_0>\beta$. Будем считать еще, что $b_0<h$. Убедимся, что имеет место равенство

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{b_0}}\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi-w} \tag{6.11}$$

и, тем самым, что I_1 не зависит от β. Действительно, по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R}\frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi-w}=0,$$

где замкнутый контур γ_R, пробегаемый в положительном направлении, представляет из себя периметр криволинейной трапеции, стороны которой A_1, A_2, A_3 и A_4 образованы следующим образом:

$A_1=\{w:\mathrm{Im}\,w=\beta,\ |w|\leqslant R\}$; $A_2=\{w:|w|=R,\ \mathrm{Re}\,w>0,\ \beta\leqslant\mathrm{Im}\,w\leqslant b_0\}$;
$A_3=\{w:\mathrm{Im}\,w=b_0,\ |w|\leqslant R\}$; $A_4=\{w:|w|=R,\ \mathrm{Re}\,w<0,\ \beta\leqslant\mathrm{Im}\,w\leqslant b_0\}$,

причем $R>0$ — достаточно велико.

Итак,

$$J_1+J_2+J_3+J_4=0, \tag{6.12}$$

где
$$J_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A_j} \frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi - w},\ j = 1, 2, 3, 4 \qquad (6.13)$$
и направление интегрирования на A_j, совпадает с положительным направлением обхода γ_R.

Так как, согласно оценке (3.4), при $\xi \in A_2$ имеют место неравенства
$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{\operatorname{Im}\xi}{\operatorname{Im} f(\xi)} \geqslant \frac{\beta}{\max\limits_{\xi \in A_2} \operatorname{Im} f(\xi)},$$
получим
$$|J_2| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{A_2} \frac{|q(\xi)|}{|f'(\xi)|}\cdot\frac{d\xi}{|\xi - w|} \leqslant \frac{1}{2\pi\beta}\max_{\xi \in A_2}\operatorname{Im} f(\xi)\,\frac{S_R}{R - |w|}\cdot\frac{C}{R^\alpha} \to 0$$
(S_R — длина дуги A_2) при $R \to \infty$, поскольку по (6.1) при большом $|\xi| = R$ выполняется неравенство $|q(\xi)| \leqslant \frac{C}{R^\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\lim\limits_{R\to\infty}\max\limits_{\xi \in A_2}\operatorname{Im} f(\xi)$ конечен в силу условия $\lim\limits_{w\to\infty,\ \operatorname{Im} w > 0}[f(w) - w] = 0$ и $\lim\limits_{R\to\infty} S_R = b_0 - \beta$.

Аналогично доказывается стремление к нулю при $R \to \infty$ интеграла J_4.

Совершая в (6.12) предельный переход при $R \to \infty$, учитывая сказанное, получим, что $\lim\limits_{R\to\infty} J_1 = -\lim\limits_{R\to\infty} J_3$. Этим самым доказана формула (6.11).

Рассмотрим интеграл I_2, фигурирующий в (6.10). Наряду с функцией $\varphi(w) = \frac{q(w)}{f'(w)}$, голоморфной, согласно условиям теоремы, в полосе $0 < \operatorname{Im} w \leqslant h$, введем в рассмотрение функцию $\varphi^*(w) = \varphi(\overline{w})$, которая, очевидно, голоморфна в полосе $-h \leqslant \operatorname{Im} w < 0$. В связи с этим I_2 можно записать в виде
$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{-\beta}} \varphi^*(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi - (w - 2i\beta)}. \qquad (6.14)$$

Далее, рассуждениями вполне аналогичными тем, которые были использованы выше, можно показать, что значение интеграла (6.14) не изменится, если прямую интегрирования $C_{-\beta}$ заменить прямой C_{-b_0}, то есть, что справедливо равенство
$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{-b_0}} \frac{q^*(\xi)}{f^{*\prime}(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi - (w - 2i\beta)}, \quad ^{*)} \qquad (6.15)$$
из которого видно, что $\lim\limits_{\beta\to 0} I_2$ существует и, следовательно, поскольку, как было показано, I_1 не зависит от β, существует и $\lim\limits_{\beta\to 0} I = P(w)$, который по (6.9), (6.11) и (6.15) равен

*) Вообще впредь в этом параграфе под функцией $q^*(w)$ будем понимать $\overline{q}(\overline{w})$

$$P(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{b_0}} \frac{q(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi - w} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{-b_0}} \frac{q^*(\xi)}{f^{*\prime}(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi - w}. \qquad (6.16)$$

Переходим теперь к оценке $|r|$ при малых τ и $\beta > 0$, считая, что $w \in K$. При $\tau \to 0$ и $\beta \to 0$ ($\beta > 0$) произвольным образом области $G_\beta(\tau)$ сходятся как к ядру к области $B(t) = G_0(0)$, причем так, что при этом выполняются все условия одной теоремы из [5]*), согласно которой $\Phi_\beta(w, \tau) \to f(w)$ равномерно во всякой полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant \beta_0$, $\beta_0 > 0$. Зафиксируем β_0, положив $\beta_0 = b_0$. Тогда, представляя интеграл
$$I_\beta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_\beta} \operatorname{Im}\left[\frac{q(\xi)}{\Phi'_\beta(\xi, \tau)}\right]\cdot\frac{d\xi}{\xi - w} \qquad (6.17)$$
в виде
$$I_\beta = I_{\beta 1} - I_{\beta 2}, \qquad (6.18)$$
где
$$I_{\beta 1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{b_0}} \frac{q(\xi)}{\Phi'_\beta(\xi, \tau)}\cdot\frac{d\xi}{\xi - w};\quad I_{\beta 2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{-b_0}} \frac{q^*(\xi)}{\Phi^{*\prime}_\beta(\xi, \tau)}\cdot\frac{d\xi}{\xi - (w - 2i\beta)}, \qquad (6.19)$$
убедимся, что при $\tau \to 0$ и $\beta \to 0$ $I_{\beta 1} \to I_1$ и $I_{\beta 2} \to I_2$ равномерно в K. Покажем, например, первое. Действительно, имеет место оценка
$$|I_{\beta 1} - I_1| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{C_{b_0}}\left[\frac{1}{\Phi'_\beta(\xi, \tau)} - \frac{1}{f'(\xi)}\right]\frac{q(\xi)}{\xi - w}\,d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_{b_0}}\left|\frac{1}{\Phi'_\beta(\xi, \tau)} - \frac{1}{f'(\xi)}\right|\frac{|q(\xi)|}{|\xi - w|}\,d\xi <$$
$$< \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{-R_1}\left|\frac{1}{\Phi'_\beta(x + ib_0, \tau)} - \frac{1}{f'(x + ib_0)}\right|\frac{|q(x + ib_0)|}{|x + R_1 + i(b - b_0)|}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\left|\frac{1}{\Phi'_\beta(x + ib_0, \tau)} - \frac{1}{f'(x + ib_0)}\right|\frac{|q(x + ib_0)|}{|x - R_1 + i(b - b_0)|}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R_1}^{R_1}\left|\frac{1}{\Phi'_\beta(x + ib_0, \tau)} - \frac{1}{f'(x + ib_0)}\right|\frac{|q(x + ib_0)|}{b - b_0}\,dx, \qquad (6.20)$$
где $R_1 > 0$ — произвольное число такое, что $R_1 \geqslant R_0$. Выберем теперь R_1 таким, чтобы при $|x| \geqslant R_1$ выполнялось неравенство
$$|q(x + ib_0)| \leqslant \frac{C}{|x + ib_0|^\alpha},\ C = \text{const},\ 0 < \alpha. \qquad (6.21)$$
(Такой выбор R_1 по условию теоремы возможен). Далее, по формуле (3.4) на прямой C_{b_0} имеют место неравенства
$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{b_0}{\operatorname{Im} f(\xi)};\quad |\Phi'_\beta(\xi, \tau)| \geqslant \frac{b_0}{\operatorname{Im}\Phi_\beta(\xi, \tau)}. \qquad (6.22)$$

*) См. [5], теорема 26, ч. II п. 18.5. стр. 231.

Из первого из этих неравенств видно, что функция $f'(\xi)$ равномерно на прямой C_{b_0} ограничена снизу некоторой положительной константой, пусть $k_0(b_0)$, то есть

$$|f'(\xi)| \geqslant k_0(b_0). \tag{6.23}$$

Тогда из второго неравенства из (6.22), учитывая равномерную на C_{b_0} сходимость $\Phi_\beta(w, \tau) \to f(w)$ при $\beta \to 0$ и $\tau \to 0$, заключаем, что при достаточно малых $\beta > 0$ и τ имеет место, например, такая равномерная на C_{b_0} оценка:

$$|\Phi'_\beta(\xi, \tau)| \geqslant \frac{1}{2} k_0(b_0). \tag{6.24}$$

Как видно из (6.21), (6.23) и (6.24), при достаточно малых $\beta > 0$ и τ величина первого слагаемого правой части (6.20)

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-R_1} \left| \frac{1}{\Phi'_\beta(x + ib_0, \tau)} - \frac{1}{f'(x + ib_0)} \right| \frac{|q(x + ib_0)|}{|x + R_1 + i(b - b_0)|} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3C}{2\pi k_0(b_0)} \int\limits_{-\infty}^{-R_1} \frac{dx}{|x + ib_0|^\alpha |x + R_1 + i(b - b_0)|}$$

при соответствующем выборе R_1 (увеличим его, если нужно) может быть, сделана меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное заданное число. Точно так же и величина второго слагаемого в правой части (6.20) при достаточно малых $\beta > 0$ и τ может быть сделана меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, если R_1 достаточно велико. Фиксируем теперь такое R_1, что величина каждого из первых двух слагаемых в правой части (6.20) меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, при $0 < \beta \leqslant \eta_0$ и $|\tau| \leqslant \Theta_0$, где η_0 и Θ_0 — некоторые малые числа. Тогда (при таком фиксированном R_1) величина третьего слагаемого правой части (6.20) также может быть сделана меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, при соответствующем выборе малых $\beta > 0$ и τ.

Последнее следует из неравенства

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-R_1}^{R_1} \left| \frac{1}{\Phi'_\beta(x + ib_0, \tau)} - \frac{1}{f'(x + ib_0)} \right| \frac{|q(x + ib_0)|}{b - b_0} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\pi(b - b_0)(k_0(b_0))^2} \int\limits_{-R_1}^{R_1} |\Phi'_\beta(x + ib_0, \tau) - f'(x + ib_0)| \, dx,$$

где $M = \max\limits_{-R_1 \leqslant x \leqslant R_1} |q(x + ib_0)|$, и из того факта, что при $\beta \to 0$ и $\tau \to 0$ $\Phi'_\beta(w, \tau) \to f'(w)$ равномерно на всяком замкнутом множестве, лежащем строго внутри полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$

найдутся такие достаточно малые числа η_1 и Θ_1, $0 < \eta_1 \leqslant \eta_0$, $0 < \Theta_1 \leqslant \Theta_0$, что при $0 < \beta \leqslant \eta_1$, $|\tau| \leqslant \Theta_1$ будет выполняться неравенство

$$|I_{\beta 1} - I_1| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и означает, что $I_{\beta 1}$ равномерно в K сходится к I_1 при $\beta \to 0$ и $\tau \to 0$.

Доказательство для случая $I_{\beta 2} \to I_2$ совершенно аналогично.

Учитывая еще равномерную в K сходимость $\Phi'_\beta(w, \tau)$ к $f'(w)$ при $\beta \to 0$ и $\tau \to 0$, из формулы (6.7), записанной в виде

$$r = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^t \{\Phi'_\beta(w, \tau)[I_{\beta 1} - I_{\beta 2}] - f'(w)[I_1 - I_2]\} \, d\tau,$$

заключаем, что каково бы ни было $\varepsilon_1 > 0$, при достаточно малых $\beta > 0$ и τ в K будет иметь место неравенство

$$|r| < \varepsilon_1 t.$$

Совершим, наконец, в равенстве (6.6) предельный переход $\beta \to 0$. Так как $\lim\limits_{\beta \to 0} \Phi_\beta(w, \tau) = \Phi(w, \tau)$, то в пределе в K при малых t получим

$$\Phi(w, \tau) = f(w) + tf'(w) P(w) + r_0,$$

где $|r_0| \leqslant \varepsilon_1 t$, что равносильно формуле (6.2). Поскольку K — произвольный компакт, целиком лежащий в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, то теорема доказана.

§ 7. Две специальные вариации в классе H. Специализируем теперь функцию $q(w)$, фигурирующую в предыдущем параграфе, положив

$$q(w) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{A_k}{f(w) - z_k} + \frac{\bar{A}_k}{f(w) - \bar{z}_k} \right\}, \tag{7.1}$$

где $f(w) \in H$, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — аффиксы произвольных фиксированных точек полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, A_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — произвольное комплексное число. Нетрудно убедиться, что функция $f(w) + tq(w)$, где $q(w)$ выбрана таким образом, при малых $t > 0$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 3, причем образ вещественной оси $\operatorname{Im} w = 0$ при отображении $z = f(w) + tq(w)$ лежит в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

1. Пусть $z_k = f(w_k)$, где w_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — некоторая внутренняя точка полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$. Непосредственным подсчетом функции $P(w)$ по формуле (6.3) (или (6.16)), когда $q(w)$ есть функция (7.1), убеждаемся согласно теореме 3, что справедлива следующая.

Теорема 4. Вместе с функцией $f(w)$ классу H принадлежит при малом $t > 0$ и функция

$$f_*(w) = f(w) + t \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{A_k}{f(w) - f(w_k)} + \frac{\bar{A}_k}{f(w) - \overline{f(w_k)}} + \right. \tag{7.2}$$

$$\left. + \frac{A_k}{[f'(w_k)]^2} \cdot \frac{f'(w)}{w_k - w} + \frac{\bar{A}_k}{\overline{[f'(w_k)]^2}} \cdot \frac{f'(w)}{\bar{w}_k - w} \right\} + o(t).$$

2. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_m$ суть точки верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, внешние для области, являющейся образом полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ при отображении $z = f(w) \in H$. Тогда, как нетрудно убедиться, функция

$$f_*(w) = f(w) + t\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{A_k}{f(w)-z_k} + \frac{\overline{A}_k}{f(w)-\bar{z}_k}\right\} \tag{7.3}$$

при малом $t > 0$ также принадлежит классу H.

§ 8. Постановка задачи. Вывод дифференциального уравнения для экстремальной функции. Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$I(f) = \operatorname{Re}[e^{i\theta} f'(w_0)] \tag{8.1}$$

на классе H функций $f(w)$, Θ — фиксированное вещественное число, w_0 — заданная в $\operatorname{Im} w > 0$ точка, при условии, что величина

$$K(f) = \operatorname{Im} f(w_0) = \operatorname{Re}[e^{i\alpha} f(w_0)] = K, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}, \tag{8.2}$$

фиксирована, причем $K > \operatorname{Im} w_0$.

Положим, что в H классе экстремальное значение величине (8.1) при условии (8.2) доставляет функция $f(w) \neq \infty$. Назовем такую функцию экстремальной.

1. Допустим, что образ B полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ при отображении $z = f(w)$ имеет внешнюю точку z_1, $\operatorname{Im} z_1 > 0$, а значит, и некоторую другую точку z_2, $\operatorname{Im} z_2 > 0$. Тогда образуем варьированную функцию $f_*(w) \in H$ посредством формулы (7.3) с $m = 2$. Для нее имеем

$$\delta I = I(f_*) - I(f) = -t\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k f'(w_0)}{|f(w_0)-z_k|^2} + e^{-i\theta}\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k\overline{f'(w_0)}}{[\overline{f(w_0)}-z_k]^2}\right\}, \tag{8.3}$$

$$\delta K = K(f_*) - K(f) = t\operatorname{Re}\left\{A_1\left[\frac{e^{i\alpha}}{f(w_0)-z_1} + \frac{e^{-i\alpha}}{\overline{f(w_0)}-z_1}\right] + A_2\left[\frac{e^{i\alpha}}{f(w_0)-z_2} + \frac{e^{-i\alpha}}{\overline{f(w_0)}-z_2}\right]\right\}. \tag{8.4}$$

Условие (8.2) требует, чтобы было

$$\delta K = K(f_*) - K(f) = 0. \tag{8.5}$$

Как видно из (8.4), соотношение (8.5) будет выполняться при следующем выборе произвольных величин A_1 и A_2:

$$A_2 = -A_1\frac{e^{i\alpha}[f(w_0)-z_1]^{-1} + e^{-i\alpha}[\overline{f(w_0)}-z_1]^{-1}}{e^{i\alpha}[f(w_0)-z_2]^{-1} + e^{-i\alpha}[\overline{f(w_0)}-z_2]^{-1}} = A,$$

а комплексное число A — произвольно. При этом величина δI, согласно (8.3), выразится в виде

$$\delta I = -t\operatorname{Re}\{AB(z_1, z_2)\},$$

где $B(z_1, z_2) \neq 0$ при соответствующем выборе z_1 и z_2. Поэтому за счет выбора оставшегося произвольным A можно сделать δI любого знака, т. е. $I(f)$ в данном случае не может иметь ни минимума, ни максимума, что противоречит экстремальности функции $f(w)$. Следовательно, экстремальная область B не может иметь в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ внешних точек.

2. Докажем теперь, что эта экстремальная область получается из верхней полуплоскости проведением разреза по одной аналитической дуге, имеющей начало на вещественной оси в конечной точке. Для этого воспользуемся вариационной формулой (7.2) с $m = 2$ и найдем вариации функционалов $K(f)$ и $I(f)$. Имеем:

$$\delta K = K(f_*) - K(f) = t\operatorname{Re}\{A_1 R(w_1) + A_2 R(w_2)\} + o(t), \tag{8.6}$$

где

$$R(a) = \frac{e^{i\alpha}}{f(w_0)-f(a)} + \frac{e^{-i\alpha}}{\overline{f(w_0)}-f(a)} + \frac{1}{[f'(a)]^2}\left[\frac{e^{i\alpha}f'(w_0)}{a-w_0} + \frac{e^{-i\alpha}\overline{f'(w_0)}}{a-\overline{w}_0}\right]; \tag{8.7}$$

$$\delta I = I(f_*) - I(f) = -t\operatorname{Re}\{A_1 S(w_1) + A_2 S(w_2)\} + o(t), \tag{8.8}$$

где

$$S(a) = \frac{e^{i\theta}f'(w_0)}{[f(w_0)-f(a)]^2} + \frac{e^{-i\theta}\overline{f'(w_0)}}{[\overline{f(w_0)}-f(a)]^2} + \frac{1}{[f'(a)]^2}\left[\frac{e^{i\theta}f''(w_0)}{a-w_0} + \frac{e^{-i\theta}\overline{f''(w_0)}}{a-\overline{w}_0} + \frac{e^{i\theta}f'(w_0)}{(a-w_0)^2} + \frac{e^{-i\theta}\overline{f'(w_0)}}{(a-\overline{w}_0)^2}\right]. \tag{8.9}$$

Для минимума, например, должно быть

$$\left.\begin{aligned} -t\operatorname{Re}\{A_1 S(w_1) + A_2 S(w_2)\} + 0(t) > 0 \\ t\operatorname{Re}\{A_1 R(w_1) + A_2 R(w_2)\} + 0(t) = 0 \end{aligned}\right\},$$

откуда, в силу произвольности одного из чисел A_1, A_2, заключаем, что должно быть

$$\left.\begin{aligned} A_1 S(w_1) + A_2 S(w_2) = 0 \\ A_1 R(w_1) + A_2 R(w_2) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8.10}$$

Так как определитель

$$\begin{vmatrix} S(w_1) & S(w_2) \\ R(w_1) & R(w_2) \end{vmatrix}$$

однородной системы (8.10) должен равняться нулю, то обозначая $\dfrac{S(w_2)}{R(w_2)} = \lambda$ и учитывая, что w_1 — любая точка из $\operatorname{Im} w > 0$, получим, заменив w_1 на w,

$$S(w) - \lambda R(w) = 0,$$

что с учетом (8.7) и (8.8) дает следующее дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять экстремальная функция $f(w)$:

$$\frac{e^{i\theta}f'(w_0)}{[f(w_0)-f(w)]^2} + \frac{e^{-i\theta}\overline{f'(w_0)}}{[\overline{f(w_0)}-f(w)]^2} - \frac{\lambda e^{i\alpha}}{f(w_0)-f(w)} - \frac{\lambda e^{-i\alpha}}{\overline{f(w_0)}-f(w)} =$$

$$= \frac{1}{|f'(w)|^2}\left\{\frac{e^{i\alpha} f'(w_0)}{(w-w_0)^2} + \frac{e^{-i\alpha}\overline{f'(w_0)}}{(w-\overline{w}_0)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{i\alpha} f'(w_0) + \lambda e^{i\alpha} f'(w_0)}{w-w_0} + \frac{e^{-i\alpha}\overline{f'(w_0)} + \lambda e^{-i\alpha}\overline{f'(w_0)}}{w-\overline{w}_0}\right\}. \qquad (8.11)$$

Уравнение (8.11) позволяет утверждать, как обычно, что граница экстремальной области состоит из конечного числа аналитических дуг, причем, так как каждой концевой точке разреза должен соответствовать нуль кратности, два выражения, стоящие в фигурных скобках правой части (8.11), заключаем, что разрез имеет только одну концевую точку. Наконец, этот разрез Г должен лежать в конечной части полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, поскольку в противном случае не выполнялось бы одно из условий $(\lim\limits_{w\to\infty}[f(w) - w] = 0)$ принадлежности экстремальной функции классу H.

§ 9. Дифференциальное уравнение для функции $F(z, \tau)$. Параметризуем полученный таким образом разрез Г так, как это сделано в § 2, и, наряду с экстремальной функцией $z = f(w)$, отображающей конформно полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ на область B, полученную из полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ проведением разреза Г, рассмотрим, как и в § 2, функцию $w = F(z, \tau)$, отображающую область B_τ, полученную из $\operatorname{Im} z > 0$ удалением дуги Γ_τ разреза Г, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Назовем функцию $w = F(z, \tau)$ „присоединенной“ к экстремальной функции $z = f(w)$, если обратная для нее функция $z = \Phi(w, \tau)$ принадлежит классу H. Отметим, что для присоединенной к $f(w)$ функции $F(z, \tau)$ и обратной к ней функции $\Phi(w, \tau)$ справедливы равенства

$$F(z, \tau_0) = z \text{ и } \Phi(w, 0) = f(w).$$

В этом параграфе будет получено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $F(z, \tau)$, присоединенная к экстремальной для нашей задачи функции.

Получим прежде формулу для еще одной специальной вариации функций класса H. Для этого в формуле (7.2) вместо $f(w)$ положим $\Phi(w, \tau)$. Положим затем в новой формуле $w = F(z, \tau)$, $w_k = F(z_k, \tau)$, где $z_k = \Phi(w_k, \tau)$, и, наконец, $z = f(w)$. Полученная таким образом функция

$$f_*(w) = f(w) + t\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{A_k}{f(w) - \Phi(w_k, \tau)} + \frac{\overline{A}_k}{f(w) - \overline{\Phi(w_k, \tau)}} + \right. \qquad (9.1)$$

$$\left. + \frac{A_k}{[\Phi'_w(w_k, \tau)]^2}\cdot\frac{[F'_z(z, \tau)]^{-1}}{w_k - F(z, \tau)} + \frac{\overline{A}_k}{[\overline{\Phi'_w(w_k, \tau)}]^2}\cdot\frac{[F'_z(z, \tau)]^{-1}}{\overline{w}_k - F(z, \tau)}\right\} + 0(t),$$

очевидно, принадлежит вместе с $f(w)$ классу H и при малом t отображает полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ на некоторую область, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, близкую к области B.

Далее, рассуждениями, вполне аналогичными приведенным в предыдущем параграфе, с использованием вариационной формулы (9.1) с $m = 2$ установим, что функция $F(z, \tau)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\left[\frac{\partial F(z, \tau)}{\partial z}\right]^2 = \frac{A(z)}{B(F, \tau)}, \qquad (9.2)$$

где

$$A(z) = \frac{q}{(\xi - z)^2} + \frac{\overline{q}}{(\overline{\xi} - z)^2} - \frac{\lambda e^{i\alpha}}{\xi - z} - \frac{\lambda e^{-i\alpha}}{\overline{\xi} - z}, \qquad (9.3)$$

$$B(F, \tau) = \frac{q}{(F-a)^2} + \frac{\overline{q}}{(F-\overline{a})^2} + \frac{Q}{F-a} + \frac{Q_1}{F-\overline{a}}. \qquad (9.4)$$

Здесь использованы обозначения:

$$q = e^{i\alpha} f'(w_0),\ \xi = f(w_0),\ a = a(\tau) = F(\xi, \tau) \text{ или } \xi = \Phi(a, \tau),$$

$$Q = P + \lambda\frac{e^{i\alpha}}{F'_z(\xi, \tau)},\ Q_1 = \overline{P} + \lambda\frac{e^{-i\alpha}}{\overline{F'_z(\xi, \tau)}},\ P = e^{i\alpha} f'(w_0)\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{F'_z}\right)\right]_{z=\xi}. \text{*)} \qquad (9.5)$$

Отметим, что уравнение (8.11) для экстремальной функции $f(w)$ получается из (9.2) при $\tau = 0$.

Поскольку коэффициент при z^3 в числителе правой части (9.3) равен 0 $\left(\text{т. к. } \alpha = -\frac{\pi}{2}\right)$, то функция $A(z)$ может быть представлена в виде

$$A(z) = \frac{P_2(z)}{(z-\xi)^2(z-\overline{\xi})^2}, \qquad (9.3')$$

где $P_2(z)$ — полином от z второй степени. Но в силу условия $F(z, \tau_0) = z$, как видно из (9.2), $A(z) = B(F(z, \tau_0), \tau_0)$, поэтому функция $B(F, \tau)$ допускает представление в виде

$$B(F, \tau) = \frac{Q_2(F)}{(F-a)^2(F-\overline{a})^2}, \qquad (9.4')$$

где $Q_2(F)$ — полином от F второй степени.

§ 10. Уравнения для функции $B(F, \tau)$ и ее нулей и полюсов. Мы получили для присоединенной к $f(w)$ функции $F(z, \tau)$ два уравнения: уравнение Лёвнера (2.13) и уравнение (9.2). Напишем условие совместности их, выразив $\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial\tau}$ из каждого из них и приравняв полученные выражения. Имеем:

$$\frac{\partial \log B}{\partial\tau} + \frac{1}{\mu - F}\cdot\frac{\partial \log B}{\partial F} + \frac{2}{(\mu - F)^2} = 0. \qquad (10.1)$$

Это условие совместности уравнений (2.13) и (9.2) получено при самых общих предположениях относительно функций $A(z)$ и $B(F, \tau)$, входящих в (9.2).

Теперь положим, как в нашей задаче, что вообще

$$B = B_0 F^n \prod_{k=0}^{m}(F - a_k)^{s_k},$$

---

*) Зависимость функций от их аргументов для краткости записи иногда не будем указывать.

где B_0 не зависит от F, a_k ($k=0, 1, 2, \dots, m$) — нуль или полюс функции B с соответствующей кратностью $\varkappa_k$. Тогда условие (10.1) примет вид:

$$L(F) \equiv \frac{d\log B_0}{d\tau} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\varkappa_k}{F-a_k} \cdot \frac{da_k}{d\tau} + \frac{1}{\mu - F}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\varkappa_k}{F-a_k} + \frac{n}{F}\right) + \frac{2}{(\mu-F)^2} = 0.$$

Отсюда, прежде всего, заключаем, что одна из величин a_k, пусть a_0, должна равняться μ. Вычисляя далее коэффициент при $(\mu-F)^{-2}$ лорановского разложения функции $L(F)$ в окрестности точки $F=\mu$, вычеты функции $L(F)$ относительно точек $F=\mu$, $F=0$ и $F=a_k\neq\mu$ ($k=1, 2, \dots, m$), а также $\lim\limits_{F\to\infty} L(F)$ и приравнивая все эти величины нулю, получим следующие условия, которые вместе с условием

1) $a_0=\mu$

обеспечивают выполнение равенства $L(F)=0$:

2) $\varkappa_0=2$;

3) $B_0=\text{const}$;

4) $n=0$;

5) $\dfrac{da_k}{d\tau}=\dfrac{1}{\mu-a_k}$, $k=1, 2, \dots, m$;

6) $2\mu+\sum\limits_{k=1}^{m}\varkappa_k a_k=\text{const}$.

В случае нашей задачи, когда функция $B(F, \tau)$ имеет вид (9.4′), условия 1) — 4) приводят к такому виду для функции $B(F, \tau)$:

$$B(F, \tau) = B_0\frac{(F-\mu)^2}{(F-a)^2(F-\bar a)^2}, \tag{10.2}$$

и, следовательно, для функции $A(z)$ к виду

$$A(z) = A_0\frac{(z-\zeta_0)^2}{(z-\xi)^2(z-\bar\xi)^2}, \tag{10.3}$$

где $A_0=B_0=\text{const}$, $\zeta_0=\mu(\tau_0)=\text{const}$. Условия же 5) и 6) в нашем случае сводятся к следующим условиям:

$$\mu-(a+\bar a)=\text{const}, \tag{10.4}$$

$$\frac{da}{d\tau}=\frac{1}{\mu-a}. \tag{10.5}$$

§ 11. Решение задачи об экстремуме $I(f)=\operatorname{Re}[e^{i\theta}f'(w_0)]$ при условии, что $\operatorname{Im} f(w_0)=K$ фиксировано. 1. Из (10.4) и (10.5) имеем:

$$\frac{d(\mu-a)}{d\tau}=\frac{d\bar a}{d\tau}=\frac{1}{\mu-\bar a}=\frac{\mu-a}{|\mu-a|^2},$$

т. е.

$$\frac{d\log(\mu-a)}{d\tau}=\frac{1}{|\mu-a|^2},$$

откуда, приравнивая мнимые части левой и правой частей, после интегрирования получим

$$\arg(a-\mu)=\text{const}=\beta. \tag{11.1}$$

Положим

$$a=x+iy. \tag{11.2}$$

Из (10.5), отделяя вещественную и мнимую части и учитывая (11.1) и (11.2), находим, что

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{\mu-x}{|\mu-a|^2}=-\frac{\cos\beta}{|\mu-a|}, \tag{11.3}$$

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{y}{|\mu-a|^2}=\frac{\sin\beta}{|\mu-a|}. \tag{11.4}$$

По (11.3) и (11.4) $\dfrac{dx}{dy}=-\operatorname{ctg}\beta=\text{const}$, и интегрированием получаем

$$x+y\operatorname{ctg}\beta=\text{const}=x_0+y_0\operatorname{ctg}\beta=x_1+y_1\operatorname{ctg}\beta, \tag{11.5}$$

где обозначено: $w_0=x_0+iy_0=a(0)$; $x_1+iy_1=a(\tau_0)=F(f(w_0), \tau_0)=f(w_0)$. Здесь величины x_0 и y_0 заданы вместе с w_0, $y_1=\operatorname{Im} f(w_0)=K$ — задано, величина β подлежит определению.

Отметим, что из (11.4) следует

$$\frac{dy}{y}=\frac{d\tau}{|\mu-a|^2}. \tag{11.4′}$$

2. Из уравнения (2.13) дифференцированием по z имеем

$$\frac{\partial\log F'_z}{d\tau}=\frac{1}{(\mu-F)^2}, \tag{11.6}$$

откуда при $z=\xi=f(w_0)$ интегрированием по τ в пределах от 0 до τ, учитывая, что $F(\xi, \tau)=a$, $F(\xi, 0)=f^{-1}(\xi)$, $F'_z(\xi, 0)=\dfrac{1}{f'(w_0)}$, и имея в виду (11.4) и (11.1), получим

$$\log[F'_z(\xi, \tau)f'(w_0)]=\int_0^\tau\frac{d\tau}{(\mu-a)^2}=e^{-2i\beta}\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}=e^{-2i\beta}\log\frac{y}{y_0}. \tag{11.7}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{F'_z(\xi, \tau)}=f'(w_0)\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-e^{-2i\beta}}, \tag{11.7}$$

откуда еще (при $\tau=\tau_0$) следует, что

$$f'(w_0)=\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{-e^{-2i\beta}}. \tag{11.8}$$

3. Будем для простоты записи впредь обозначать $F'_\xi=F'_z(\xi, \tau)$ и $\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{F'_\xi}\right)=\left[\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{F'_z}\right)\right]_{z=\xi}$. Рассмотрим величину

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{F'_z}\right)=-\frac{F'_{zz}}{F'^2_z}, \tag{11.9}$$

которая при $z = \xi = f(w_0)$ переходит в $\psi_0 = \psi(\xi) = -\dfrac{F''_{\xi\xi}}{F'^2_{\xi}}$, фигурирующую в (9.5).

Из (11.6) после дифференцирования по z и деления на $F_z'^2$ имеем:

$$\frac{1}{F_z'^2}\cdot\frac{\partial F''_{zz}}{\partial\tau} = \frac{1}{(\mu-F)^2}\cdot\frac{F''_{zz}}{F_z'^2} + \frac{2}{(\mu-F)^3}. \tag{11.10}$$

Но

$$\frac{\partial\psi(z)}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(-\frac{F''_{zz}}{F_z'^2}\right) = -\frac{1}{F_z'^2}\cdot\frac{\partial F''_{zz}}{\partial\tau} + 2\frac{F''_{zz}}{F_z'^3}\cdot\frac{\partial F'_z}{\partial\tau},$$

что в виду (11.6) и (11.10) дает

$$\frac{\partial\psi(z)}{\partial\tau} = \frac{F''_{zz}}{F_z'^2}\cdot\frac{1}{(\mu-F)^2} - \frac{2}{(\mu-F)^3}.$$

Отсюда при $z = \xi$ получаем

$$\frac{d\psi_0}{d\tau} = -\frac{\psi_0}{(\mu-a)^2} - \frac{2}{(\mu-a)^3}. \tag{11.11}$$

Интеграл этого уравнения может быть записан в виде:

$$\psi_0 = \left\{b_0 - \int_0^{\tau}\frac{2}{(\mu-a)^3}\, e^{\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(\mu-a)^2}}\, d\tau\right\} e^{-\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(\mu-a)^2}},$$

где b_0 — некоторая постоянная. При $\tau = \tau_0$ ψ_0 обращается в нуль, так как $F(z, \tau_0) = z$, $F'_z(z, \tau_0) = 1$, поэтому

$$\psi_0 = e^{-\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(\mu-a)^2}} \int_{\tau}^{\tau_0}\frac{2}{(\mu-a)^3}\, e^{\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(\mu-a)^2}}\, d\tau. \tag{11.12}$$

С использованием (11.7) после простых вычислений окончательно получим

$$\psi_0 = ie^{-2i\beta}\left\{\frac{1}{y} - \frac{1}{y_1}\left(\frac{y_1}{y}\right)^{e^{-2i\beta}}\right\}. \tag{11.13}$$

4. Находим теперь величину Q, входящую в (9.4) и равную, согласно (9.5),

$$Q = e^{i\theta} f'(w_0)\,\psi_0 + \lambda\frac{e^{i\alpha}}{F'_{\xi}}.$$

С помощью (11.13) и (11.7) получаем такое выражение для Q:

$$Q = \frac{ie^{i(\theta-2\beta)} f'(w_0)}{y} + \left\{\lambda e^{i\alpha} - ie^{i(\theta-2\beta)}\frac{1}{y_1}\left(\frac{y_1}{y}\right)^{e^{-2i\beta}}\right\} f'(w_0)\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-e^{-2i\beta}}. \tag{11.14}$$

5. Получим уравнение для неизвестных величин λ и β. Покажем, прежде всего, что λ — вещественное число. Действительно, из условия

$$Q + Q_1 = 2\operatorname{Re} P + 2\lambda\operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}}{F'_{\xi}} = 0,$$

выражающего тот факт, что числителем функции $B(F, \tau)$ в (9.4′) является полином второй степени, вытекает, что λ — вещественно. Следовательно, $Q_1 = \overline{Q}$ и $Q + Q_1 = Q + \overline{Q} = 2\operatorname{Re} Q = 0$, то есть

$$Q = \pm i|Q|. \tag{11.15}$$

Напишем уравнения, вытекающие из требования того, что μ — корень кратности два функции $B(F, \tau)$ (см. (10.2)):

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}\frac{q}{(\mu-a)^2} + \operatorname{Re}\frac{Q}{\mu-a} = 0 \\ &2\operatorname{Re}\frac{q}{(\mu-a)^3} + \operatorname{Re}\frac{Q}{(\mu-a)^2} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{11.16}$$

Положив

$$q = e^{i\varkappa}|q|, \tag{11.17}$$

систему (11.16) с учетом (11.1), (11.15) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{|q|}{|\mu-a|^2}\cos(\varkappa-2\beta) \pm \frac{|Q|}{|\mu-a|}\sin\beta = 0 \\ &2\frac{|q|}{|\mu-a|^3}\cos(\varkappa-3\beta) \pm \frac{|Q|}{|\mu-a|^2}\sin 2\beta = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{11.16}$$

Приравнивая нулю определитель этой однородной системы, получим

$$\begin{vmatrix} \cos(\varkappa-2\beta) & \sin\beta \\ 2\cos(\varkappa-3\beta) & \sin 2\beta \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, имея в виду, что $\beta \neq 0, \pi$, легко найдем:

$$\varkappa = 2\beta + k\pi,\quad k = 0, 1. \tag{11.18}$$

Подставив найденную величину $\varkappa$ в какое-либо из уравнений (11.16), получим

$$|Q| = \frac{|q|}{|\mu-a|\sin\beta} = \frac{|q|}{y}. \tag{11.19}$$

Отсюда и из (11.14) легко видно, что должно выполняться равенство

$$\lambda e^{i\alpha} = ie^{i(\theta-2\beta)}\cdot\frac{1}{y_1}\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{e^{-2i\beta}},$$

из которого, приравнивая модули и аргументы обеих частей, имеем в виду того, что $y_1 = K$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\arg\lambda$ равен нулю, либо π, равенства

$$|\lambda| = \frac{1}{K}\left(\frac{K}{y_0}\right)^{\cos 2\beta}, \tag{11.20}$$

$$\theta = \pi k + 2\beta + \sin 2\beta \log \frac{K}{y_0}, \quad k = 0, 1, \tag{11.21}$$

из которых неизвестные λ и β определяются.

6. Вычислим, наконец, экстремальные значения функционала

$$\operatorname{Re}[e^{i\alpha} f'(w_0)] = \operatorname{Re} q = |q| \cos(\arg q),$$

которые по (11.17) и (11.18) равны $\pm |q| \cos 2\beta$. Значение для $|q| = |f'(w_0)|$ находим из (11.8). Окончательно имеем:

$$I_{\text{extr}} = \pm \cos 2\beta \left(\frac{K}{y_0}\right)^{\cos 2\beta}. \tag{11.22}$$

Итак, равенства (11.21) и (11.22) решают задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. „Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.—Л. 1952.
3. П. П. Куфарев. Об однопараметрических семействах аналитических функций. Матем. сборник т. 13 (55), 1 (1943), стр. 87—118.
4. Н. В. Попова. Зависимость между уравнением Лёвнера и уравнением $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{w - \lambda(t)}$. Изв. АН БССР, № 6, 1954, стр. 97—98.
5. Г. Д. Суворов. Семейства плоских топологических отображений. СО АН СССР, 1965.
6. И. А. Александров, П. И. Попов. Решение задачи И. Е. Базилевича и Г. В. Корицкого о звездообразных дугах линий уровня. Сиб. матем. журнал, 6, №1 (1965), стр. 16—37.
7. П. П. Куфарев. Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций. ДАН СССР, 107, № 5 (1956), стр. 633—635.