ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 200 1968

К ЗАДАЧЕ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ЭКСТРЕМУМЕ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ОДНОЛИСТНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

В. В. СОБОЛЕВ

В данной заметке, являющейся продолжением статьи [1], помещенной в настоящем сборнике (см. стр 147.), приводится решение следующей задачи.

На классе H функций $z=f(w)$, регулярных и однолистных в полуплоскости $\operatorname{Im} w>0$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{w\to\infty,\ \operatorname{Im} w>0}[f(w)-w]=0$$

и отображающих верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ на области, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, задан функционал

$$J=\operatorname{Re}[e^{i\Theta}f'(w_0)]. \tag{1}$$

Здесь w_0 — произвольная фиксированная точка из $\operatorname{Im} w>0$, Θ — любое вещественное число.

Требуется определить экстремальное значение функционала (1) при условии, что величина

$$\operatorname{Re}[e^{i\alpha}f(w_0)]=K \tag{2}$$

фиксирована, α — произвольное вещественное число, отличное от $\pm\frac{\pi}{2}$. x).

В [1] было установлено, что экстремальная функция $f(w)$ такой задачи отображает $\operatorname{Im} w>0$ на область, лежащую в $\operatorname{Im} z>0$, без внешних точек в $\operatorname{Im} z>0$, получающуюся из полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ удалением одного конечного аналитического разреза, один конец которого лежит на вещественной оси, а дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять экстремальная функция $f(w)$, получается при $\tau=0$ из уравнения для присоединенной к $f(w)$ функции $F(z,\tau)$ (напомним, что $F(z,\tau_0)=z$, $F(f(w),0)=w$), которое для удобства читателей приведем снова:

$$\left[\frac{\partial F(z,\tau)}{\partial z}\right]^2=\frac{A(z)}{B[F,\tau)}, \tag{3}$$

x) При $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ эта задача решена в [1].

где

$$A(z)=\frac{q}{(z-\xi)^2}+\frac{\overline{q}}{(z-\overline{\xi})^2}+\frac{\lambda e^{i\alpha}}{z-\xi}+\frac{\lambda e^{-i\alpha}}{z-\overline{\xi}}, \tag{4}$$

$$B(F,\tau)=\frac{q}{(F-a)^2}+\frac{\overline{q}}{(F-\overline{a})^2}+\frac{Q}{F-a}+\frac{Q_1}{F-\overline{a}}, \tag{5}$$

причем

$$q=e^{i\Theta}f'(w_0),\quad \xi=f(w_0),\quad a=a(\tau)=F(\xi,\tau),$$

$$Q=P+\lambda\frac{e^{i\alpha}}{F'_z(\xi,\tau)},\qquad Q_1=\overline{P}+\lambda\frac{e^{-i\alpha}}{F'_z(\xi,\tau)},$$

$$P=e^{i\Theta}f'(w_0)\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{F'_z}\right)\right]_{z=\xi}.$$

Так как в нашем случае $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$, то коэффициенты при z^3 и F^3 в числителях $A(z)$ и $B(F,\tau)$ соответственно отличны от нуля, и, следовательно, с учетом условий 1) —4). (см. [1], стр 160.), вытекающих из требования выполнения совместности уравнений 3) с уравнением

$$\frac{\partial F(z,\tau)}{\partial\tau}=\frac{1}{\mu(\tau)-F(z,\tau)}, \tag{6}$$

получим следующую форму представления для функций $A(z)$ и $B(F,\tau)$:

$$A(z)=A_0\frac{(z-z_0)^2(z-z_1)}{(z-\xi)^2(z-\overline{\xi})^2}, \tag{4}$$

$$B(F,\tau)=B_0\frac{(F-\mu(\tau))^2(F-\nu(\tau))}{(F-a(\tau))^2(F-\overline{a(\tau)})^2}, \tag{5}$$

причем $A_0=B_0=\mathrm{const}$, а нули и полюсы $B(F,\tau)$ удовлетворяют, согласно условиям 5) и 6), (см. [1], стр. 160) соотношениям

$$2\mu-2(a+\overline{a})+\nu=\mathrm{const}, \tag{7}$$

$$\frac{da}{d\tau}=\frac{1}{\mu-a}, \tag{8}$$

$$\frac{d\nu}{d\tau}=\frac{1}{\mu-\nu}. \tag{9}$$

Покажем, прежде всего, что B_0 — вещественно. Для этого, приравнивая коэффициенты при старших степенях z и F в числителях правых частей (4) и (5), убеждаемся, что

$$\lambda\cos\alpha=\operatorname{Re}P+\lambda\operatorname{Re}\frac{e^{i\alpha}}{F'_z(\xi,\tau)},$$

откуда следует, что λ — вещественно, следовательно, $Q_1=\overline{Q}$ и $B_0=Q+Q_1$ — вещественно.

Совершим в (3) предельный переход $z\to\xi$, при котором $F(z,\tau)\to a(\tau)$. Получим

$$\frac{(a-\mu)^2(a-\nu)}{(a-\overline{a})^2}=\frac{q}{B_0}=\mathrm{const}. \tag{10}$$

Приравнивая здесь аргументы левой и правой частей, имеем

$$2\arg(a-\mu)+\arg(a-\nu)=\alpha_0=\text{const}, \tag{11}$$

где положено

$$\alpha_0=\arg q+\pi k, \tag{12}$$

причем k принимает значения 0 либо 1 в зависимости от того, $B_0<0$ или $B_0>0$.

Введем теперь обозначения:

$$a=x+iy, \tag{13}$$

$$a-\mu=|a-\mu|\,e^{i\arg(a-\mu)}=\rho e^{i\beta}, \tag{14}$$

$$a-\nu=|a-\nu|\,e^{i\arg(a-\nu)}=re^{i\gamma}. \tag{15}$$

Равенство (11) в новых обозначениях запишется в виде.

$$\gamma=\alpha_0-2\beta \tag{11'}$$

Покажем далее, что $\nu=\nu(\tau)$ — вещественная функция от τ. Действительно, действуя на обе части (7) сопряжением и вычитая почленно полученное соотношение из (7), получим в силу вещественности μ, что $\operatorname{Im}\nu(\tau)=\text{const}$. Но тогда из равенства

$$\frac{d\operatorname{Im}\nu}{d\tau}=\frac{\operatorname{Im}\nu}{|\mu-\nu|^2},$$

полученного из (9) отделением мнимых частей, следует $\operatorname{Im}\nu=0$, что и требовалось.

Из (14) и (15), учитывая (13), (11′) и вещественность μ и ν, а также тот факт, что $y>0$, а значит, $0<\beta<\pi$ и $0<\gamma<\pi$, находим

$$\rho=\frac{y}{\sin\beta}; \qquad r=\frac{y}{\sin(\alpha_0-2\beta)}. \tag{16}$$

Подставляя отсюда значения для ρ и r в соотношение

$$\frac{\rho^2 r}{y^2}=\left|\frac{q}{B_0}\right|=\text{const},$$

вытекающее из (10), и полагая $\left|\frac{q}{B_0}\right|=d_0$, получим выражение для $y(\tau)$ как функция от β в виде

$$y=d_0\sin^2\beta\sin(\alpha_0-2\beta). \tag{17}$$

Представим величину $\frac{d\beta}{d\tau}$ как функцию от β. Для этого отделим в (8) мнимые части

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{y}{|\mu-a|^2}, \tag{18}$$

найдем из (17) $\frac{dy}{d\beta}$ и, наконец, саму величину $\frac{d\beta}{d\tau}=\frac{dy}{d\tau}:\frac{dy}{d\beta}$, которая в соответствии с (16), (17) и (18) оказывается равной

$$\frac{d\beta}{d\tau}=[2d_0\sin\beta\sin(\alpha_0-2\beta)\sin(\alpha_0-3\beta)]^{-1}. \tag{19}$$

Выясним знак полученного выражения. Последний совпадает, очевидно, со знаком $\sin(\alpha_0-3\beta)$, который, в свою очередь, совпадает со знаком величины $\nu-\mu$, как легко видно из (14) — (16), и поэтому остается одинаковым для любого значения параметра τ, пробегающего интервал $(0,\tau_0)$, так как в противном случае в силу непрерывности функций $\nu(\tau)$ и $\mu(\tau)$ нашлось бы такое значение $\tau_1\in(0,\tau_0)$, для которого было бы $\nu(\tau_1)=\mu(\tau_1)$, что невозможно в силу условия 2) (см. [1], стр. 160).

Итак, $\beta(\tau)$ — строго монотонная функция от τ. Это позволяет вместо τ ввести новое независимое переменное β, изменяющееся в пределах от $\beta_0=\beta(0)$ до $\beta_1=\beta(\tau_0)$, и считать $\tau=\tau(\beta)$.

Далее дифференцированием по z из (6) при $z=f(w_0)=\xi$ находим

$$d\log F_z'(\xi,\tau)=\frac{d\tau}{(\mu-a)^2}=e^{-2i\beta}\frac{d\tau}{|\mu-a|^2},$$

откуда согласно (18) после интегрирования по β и умножения на $e^{i\theta}$ имеем

$$q=e^{i\Theta}f'(w_0)=\exp\left\{i\Theta+\int_{\beta_0}^{\beta_1}e^{-2i\beta}\,d\log y(\beta)\right\}. \tag{20}$$

Так как экстремальное значение функционала (1) равно $\operatorname{Re}q$, то по (17) и (12) найдем из (20):

$$J_{\text{extr}}=\pm\cos\alpha_0\left(\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_0}\right)^2\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}-\beta_0\right)}\right]^{\cos\alpha_0}\cdot$$

$$\cdot\exp(\cos 2\beta_1-\cos 2\beta_0-2\sin^2\beta_1+2\sin^2\beta_0). \tag{21}$$

Уравнение для неизвестной величины α_0 получим, если приравняем аргументы обеих частей соотношения (20), учитывая при этом, что, согласно (12), $\arg q=\alpha_0+\pi k\,(k=0,1)$. Окончательно имеем:

$$\alpha_0+\pi k=\Theta+2(\sin 2\beta_0-\sin 2\beta_1+\beta_0-\beta_1)-\sin\alpha_0\log\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}-\beta_1\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}-\beta_0\right)}. \tag{22}$$

Верхний знак в (21) соответствует значению $k=0$ в (22).

Приступим к определению неизвестных величин β_0 и β_1. Отделив в (8) вещественную часть, найдем

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{\mu-x}{|\mu-a|^2}.$$

Из (13) и (14) следует, что $\mu-x=-|a-\mu|\cos\beta$. Тогда с помощью (16) и (17) определим $\frac{dx}{d\tau}$ как функцию от β и, наконец, пользуя (18), найдем величину $\frac{dx}{d\beta}=\frac{dx}{d\tau}:\frac{d\beta}{d\tau}$, которая оказывается равной

$$\frac{dx}{d\beta}=-2d_0\cos\beta\sin(\alpha_0-3\beta). \tag{23}$$

Полагая в (17) $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, получим два соотношения, из которых видно, что

$$d_0 = \frac{y_0}{\sin^2 \beta_0 \sin(\alpha_0 - 2\beta_0)} = \frac{y_1}{\sin^2 \beta_1 \sin(\alpha_0 - 2\beta_1)}. \tag{24}$$

Здесь $y_0 = y(0) = \operatorname{Im} w_0$ — задано вместе с w_0, $y_1 = y(\tau_0)$ — пока неизвестно.

Из (23) интегрированием в пределах от $\beta = \beta_0$ до $\beta = \beta_1$ с учетом (24) после простых преобразований получим

$$x_1 = x_0 + y_0 \left[\operatorname{ctg}^2 \beta_0 \operatorname{ctg}(\alpha_0 - 2\beta_0) - \frac{\cos^2 \beta_1 \cos(\alpha_0 - 2\beta_1)}{\sin^2 \beta_0 \sin(\alpha_0 - 2\beta_0)} \right], \tag{25}$$

где $x_0 = \operatorname{Re} w_0$, $x_1 = x(\tau_0)$ пока также неизвестно.

Получим еще систему двух уравнений для определения x_1, y_1. Для этого запишем равенство (7) в виде

$$2(\mu - x) - (x - \nu) - x = \text{const}. \tag{7}$$

Подставляя сюда значения $\mu - x$ и $x - \nu$, найденные из (14), (15) и (16) с учетом (11′), и приравнивая друг другу левые части (7′), высчитанные при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, получим уравнение

$$x_1 + y_1 [2 \operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg}(\alpha_0 - 2\beta_1)] = x_0 + y_0 [2 \operatorname{ctg} \beta_0 + \operatorname{ctg}(\alpha_0 - 2\beta_0)], \tag{26}$$

которое вместе с уравнением

$$x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha = K, \tag{15}$$

полученным из (2) подстановкой туда экстремальной функции $f(w)$[x]), дает искомую систему уравнений для нахождения неизвестных величин x_1 и y_1.

Исключая, наконец, x_1 и y_1 из (24), (25), (26) и (27), будем иметь для β_0 и β_1 два трансцендентных уравнения, которые вместе с (22) и (21) принципиально решают нашу задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Куфарев, В. В. Соболев, Л. В. Спорышева. Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости. Настоящий сборник.

x) Имеет место следующая цепочка равенств: $f(w_0) = \xi = F(\xi, \tau_0) = a(\tau_0) = x_1 + iy_1$