Адрес редакции: г. Киев, ул. Репина, 3,
Институт математики АН УССР,
тел. 25-90-16

Украинский математический журнал, т. 22, № 3, 1970

Издается на русском и украинском языках

Журнал выходит 6 раз в год

Редактор *Л. И. Кондратюк*

...кий редактор *Т. М. Шендерович* Корректоры *А. И. Изместьева, И. А. Проховник*

...2. Сдано в набор 4.III 1970 г. Подписано к печати 28.IV 1970 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. ...физ. листов 9,0. Условн. печ. листов 12,6. Учетно-изд. листов 10,56. Тираж 1294. Зак. 148.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.
...евская книжная типография № 5 Комитета по печати при Совете Министров УССР, Киев, Репина, 4.

УДК 517.54

Экстремальные задачи для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости

И. А. Александров, В. В. Соболев

В работе рассматриваются некоторые классы однолистных аналитических функций, заданных в полуплоскости, и изучаются их экстремальные свойства относительно различных функционалов.

Основным объектом исследования является класс H^1, вводимый следующим определением.

Класс H^1 — совокупность всех функций $w = f(z)$, регулярных и однолистных в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, принимающих значения в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ и нормированных условием

$$\lim_{z\to\infty} [f(z) - z] = 0, \qquad z \in \Pi^+.$$

Существенные отличия класса H^1 от других хорошо известных и интенсивно изучаемых классов однолистных функций (например, S, Σ и др.) вытекают из указанного способа нормировки этого класса. Подчеркнем, что последняя достигается наложением условия, предписывающего определенное поведение функциям около граничной точки, в нашем случае — в принадлежащей Π^+ части окрестности бесконечно удаленной точки.

Интерес к классу H^1 обусловлен его связью с различными задачами механики сплошных сред (гидродинамика, теория упругости и др.). Класс H^1 исследовался ранее М. А. Лаврентьевым, П. П. Куфаревым, Н. В. Поповой и др. авторами. Так, М. А. Лаврентьев в работе [1] с помощью предложенного им вариационного метода получил ряд важных качественных результатов и дал приложения к вопросам струйного обтекания. Н. В. Поповой [2] на основе параметрического метода было получено несколько точных оценок функционалов на классе H^1. В статье [3] доказана возможность распространения на класс H^1 вариационно-параметрического метода исследования экстремальных задач.

В настоящей работе вариационно-параметрический метод применен к решению задач об отыскании множеств значений систем функционалов, заданных как на самом классе H^1, так и на некоторых его подклассах H^1_*, H^1_L и других. Мы дадим подробное доказательство теоремы 1, достаточно полно раскрывающее сущность метода и иллюстрирующее его практическое использование. Это позволило нам не включать в текст статьи аналогично выполненное доказательство теоремы 2. Обе теоремы служат источником ряда интересных следствий, дающих в точной форме геометрические характеристики отображений внутри полуплоскости. Часть из них содержит соответствующие результаты работ [2—4].

Сделаем еще несколько предварительных замечаний.

Известно [5], что множество D значений непрерывной системы $I(f) = (I_1(f), \ldots, I_m(f))$, $m = 1, 2, \ldots,$ вещественных функционалов $I_s(f)$, $s = 1, \ldots, m$, на некотором классе голоморфных функций, допускающем гомотопию в тождественное отображение на континуальных семействах, равномерно непрерывных внутри области B задания класса*, является связным. Оно замкнуто для компактных в себе (относительно равномерной сходимости внутри B) классов и может оказаться незамкнутым для некомпактных в себе классов.

Легко видеть, что класс H^1 — связный, поскольку вместе с $f(z) \in H^1$ классу H^1 при любом вещественном ρ, $\rho \neq 0$, принадлежит и функция $f(z, \rho) = \rho f\left(\frac{z}{\rho}\right)$, равномерно непрерывная внутри Π^+ по ρ, причем $f(z, \rho) \to z$, $f(z, \rho) \to f(z)$ равномерно внутри Π^+ при $\rho \to 0$ и $\rho \to 1$ соответственно. Но H^1 не является компактным в себе**. Поэтому множество D значений системы $I(f)$ на H^1, необходимо связное, может не быть открытым или замкнутым. Тем не менее, в соответствии со сложившейся в литературе терминологией, мы будем называть множество D областью значений системы функционалов $I(f)$ на классе H^1.

Для определения границы замкнутой области достаточно найти множество всех ее неособых (в смысле Н. А. Лебедева [6]) граничных точек и произвести в этом множестве замыкание. Обычный способ решения экстремальных задач, основанный на применении вариационных формул, позволяет определить все собственные неособые граничные точки, т. е. такие неособые граничные точки, которые вносятся функциями рассматриваемого класса. В случае же некомпактных классов информации об одних лишь собственных неособых точках, вообще говоря, недостаточно для нахождения всей границы. В некоторых случаях, как будет показано ниже на примерах конкретных задач, указания всех собственных граничных точек D достаточно для определения самой области D, а в других случаях — для нахождения областей, мажорирующих D.

§ 1. Мажорантная область для одной системы функционалов на классе H^1

Т е о р е м а 1. *Пусть на классе H^1 функций $f(z)$ задана система функционалов $I(f) = (I_1, I_2, I_3)$:*

$$I_1 = \log \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}, \qquad I_2 = \log |f'(z)|, \qquad I_3 = \arg f'(z), \tag{1.1}$$

со значениями в R^3; $z \in \Pi^+$ — произвольно заданная точка. Тогда область D значений системы (1.1) принадлежит множеству T:

$$I_1^2 \geqslant I_2^2 + I_3^2, \qquad I_1 \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Все точки $I_0 = (I_{10}, I_{20}, I_{30})$ конуса Σ — поверхности T, кроме точек образующей

$$I_1 = I_2, \qquad I_3 = 0, \tag{1.3}$$

вносятся в D функциями $f(\zeta) \in H^1$, удовлетворяющими уравнению

$$\left(\frac{f - \xi}{\zeta - z}\right)^{1 - i\operatorname{ctg}\beta} = \left(\frac{f - \bar{\xi}}{\zeta - \bar{z}}\right)^{-1 - i\operatorname{ctg}\beta}. \tag{1.4}$$

---

* Для краткости речи такой класс называется «связным».

** В этом легко убедиться, построив надлежащим образом семейства функций из H^1, равномерно внутри $\Pi+$ сходящиеся к ∞. В качестве такого семейства можно, например, взять двупараметрическое семейство функций $w = f(z) = \mu + [(z - \mu)^2 - h^2]^{1/2}$, μ, h — вещественны, отображающих $\Pi+$ на области, полученные из $\operatorname{Im} w > 0$ удалением вертикального разреза длиной $|h|$, начинающегося в точке $w = \mu$.

Параметры $\xi = f(z)$ и β, $0 < \beta < \pi$, определяются соотношениями

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z - \operatorname{ctg}\beta\,[\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} z], \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Im} f(z) = e^{I_{10}} \operatorname{Im} z, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{ctg}\beta = -\frac{I_{10} + I_{20}}{I_{30}}. \tag{1.7}$$

Граничные функции $w = f(\zeta)$ отображают Π^+ на области, полученные из полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ удалением одного аналитического разреза Γ, примыкающего под прямым углом к оси $\operatorname{Im} w = 0$. Вдоль этого разреза выполняется равенство

$$\arg(w - \xi) + \arg(w - \bar{\xi}) - \operatorname{ctg}\beta \log\left|\frac{w - \xi}{w - \bar{\xi}}\right| = 0. \tag{1.8}$$

Точки образующей (1.3), отличные от точки $(0, 0, 0)$, вносимой функцией $f(\zeta) = \zeta \in H^1$, а также бесконечно удаленная точка R^3 являются предельными для последовательностей $\{I(f_n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, точек из D, когда соответствующие последовательности $\{f_n\}$ функций класса H^1 равномерно внутри Π^+ сходятся к ∞.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякое бесконечное множество функций из H^1 образует нормальное семейство, т. е. из всякого его бесконечного подмножества можно извлечь последовательность, равномерно внутри Π^+ сходящуюся либо к регулярной функции, а значит, к функции того же множества, либо к бесконечности. Поэтому класс H^1, пополненный функцией $f = \infty$, будет уже компактным в себе относительно равномерной внутри Π^+ сходимости. Каждой последовательности $\{f_n\}$, $f_n \in H^1$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к ∞ равномерно внутри Π^+, поставим в соответствие точку $I_0 \in \bar{D}$, получающуюся как предел (если он существует) последовательности $\{I(f_n)\}$. С другой стороны, если I_0 — какая-либо граничная точка, отличная от собственной (назовем такие граничные точки несобственными), то в H^1 найдется такая последовательность $\{f_n\} \to \infty$ равномерно внутри Π^+, что соответствующая последовательность $\{I(f_n)\} \to I_0$ по расстоянию в R^3.

Назовем функцию $f(\zeta)$, отвечающую любой неособой собственной граничной точке I_0 системы (1.1), граничной функцией относительно системы (1.1).

Выведем функционально-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет любая граничная функция системы (1.1).

Пусть I_e, $I_e \overline{\in} \bar{D}$, — произвольная точка, I_0 — ближайшая к I_e собственная граничная точка области D, $f(\zeta)$ — соответствующая ей граничная функция.

Образуем варьированную функцию $f_* \in H^1$ посредством формулы [3]:

$$f_*(z) = f(z) + tP(z) + o(t), \tag{1.9}$$

где

$$P(z) = \frac{A}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{\bar{A}}{f(z) - \overline{f(\zeta)}} + \frac{A}{[f'(\zeta)]^2}\,\frac{f'(z)}{\zeta - z} + \frac{\bar{A}}{[\overline{f'(\zeta)}]^2}\,\frac{f'(z)}{\bar{\zeta} - z}, \tag{1.10}$$

A — произвольная комплексная постоянная, ζ — некоторая точка из $\Pi+$, $t > 0$ — мало.

Обозначим через I точку, вносимую в D функцией f. Для координат I_1, I_2, I_3 точки I после простых преобразований с учетом (1.9) и (1.1) получим

$$I_k = I_{k0} + t\Phi_k[f, P] + o(t), \tag{1.11}$$

где

$$\Phi_1[f, P] = \frac{\operatorname{Im} P(z)}{\operatorname{Im} f(z)}, \qquad \Phi_2[f, P] = \operatorname{Re}\frac{P'(z)}{f'(z)}, \qquad \Phi_3[f, P] = \operatorname{Im}\frac{P'(z)}{f'(z)}, \tag{1.12}$$

а I_{k0} — координаты точки I_0.

Так как $\varrho(I, I_e) \geqslant \varrho(I_0, I_e)$ и

$$\varrho^2(I, I_e) = \varrho^2(I_0, I_e) + 2t\sum_{k=1}^{3}\Phi_k[f, P](I_{k0} - I_{ke}) + o(t),$$

то

$$\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\Phi_k[f, P] \geqslant 0, \tag{1.13}$$

где

$$\alpha_k = \frac{I_{k0} - I_{ke}}{\varrho(I_0, I_e)}, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{1.14}$$

— направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{I_eI_0}$.

Заменяя $P(z)$ в формуле (1.13) значением (1.10), придем к неравенству вида $\operatorname{Re}[AK(\zeta, z)] \geqslant 0$. В силу произвольности комплексного A отсюда следует, что $K(\zeta, z) = 0$. Записав подробно $K(\zeta, z)$ и считая теперь ζ произвольной точкой из Π^+, получаем следующее уравнение, которому должна удовлетворять граничная функция $f(\zeta)$:

$$\left\{\frac{p}{[f(\zeta) - f(z)]^2} + \frac{\bar p}{[f(\zeta) - \overline{f(z)}]^2} + \frac{q}{f(\zeta) - f(z)} + \frac{\bar q}{f(\zeta) - \overline{f(z)}}\right\} f'^2(\zeta) =$$

$$= \frac{p}{(\zeta - z)^2} + \frac{\bar p}{(\zeta - \bar z)^2} + \frac{Q}{\zeta - z} + \frac{\overline{Q}}{\zeta - \bar z}, \tag{1.15}$$

где

$$p = \alpha_2 - i\alpha_3, \qquad q = -i\alpha_1/\operatorname{Im} f(z), \qquad Q = qf'(z) + pf''(z)/f'(z). \tag{1.16}$$

Из вида уравнения (1.15) следует [7], что $f(\zeta)$ отображает Π^+ на область B_0 с кусочно-аналитической границей. Применением вариации [3]

$$f_*(z) = f(z) + t\left(\frac{A}{f(z) - w_0} + \frac{\overline{A}}{f(z) - \overline{w}_0}\right), \qquad t > 0,$$

w_0 — произвольная точка из $\operatorname{Im} w > 0$, $w_0 \overline{\in} \overline{B}_0$, легко убедиться, что в $\operatorname{Im} w > 0$ область B_0 не имеет внешних точек. Из сказанного следует, что любая граничная функция $w = f(\zeta)$ отображает Π^+ на область, получаемую из полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ удалением некоторого кусочно-аналитического разреза Γ. Один конец его лежит на оси $\operatorname{Im} w = 0$. В силу условия нормировки этот разрез должен быть конечным. Кроме того, так как каждой концевой точке Γ должен соответствовать нуль кратности два правой части уравнения (1.15), заключаем, что Γ имеет не более одной концевой точки.

Параметризуем разрез Γ с помощью некоторой непрерывной на $[0, \tau_0]$ функции $w = \psi(\tau)$, считая $\psi(0)$ концевой точкой Γ, лежащей в $\operatorname{Im} w > 0$. Рассмотрим функцию $z = F(w, \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, отображающую область $B_\tau = \{w\colon \operatorname{Im} w > 0,\ w \neq \psi(t),\ \tau \leqslant t \leqslant \tau_0\}$ на Π^+. Назовем $F(w, \tau)$ присоединенной к граничной функции $f(z)$, если обратная для $F(w, \tau)$ (по первому аргументу) функция $\Phi(z, \tau) \in H^1$ при любом τ, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. Для функций $F(w, \tau)$ и $\Phi(z, \tau)$ справедливы следующие равенства:

$$F(w, \tau_0) = w, \qquad \Phi(z, 0) = f(z). \tag{1.17}$$

Как показано в [3], существует такая непрерывная на $[0, \tau_0]$ вещественная функция $\mu(\tau)$, что $F(w, \tau)$ может быть получена как интеграл уравнения

$$\frac{\partial F(w, \tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{\mu(\tau) - F(w, \tau)}, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0, \tag{1.18}$$

удовлетворяющий условию $F(w, \tau_0) = w$. Геометрически функция $\mu(\tau)$ представляет точку вещественной оси $\operatorname{Im} z = 0$, являющуюся при отображении $z = F(w, \tau)$ образом подвижного конца ψ_τ разреза $\Gamma_\tau = \{w\colon w \neq \psi(t),\ \tau \leqslant t \leqslant \tau_0\}$.

Наряду с уравнением (1.18) для $F(w, \tau)$ получим еще одно дифференциальное уравнение. Для этого обратимся к формуле одной специальной вариации. Напишем выражение для функции $\Phi_*(z, \tau) \in H^1$, отображающей Π^+ на некоторую область B_τ^*, близкую к B_τ. Воспользовавшись формулами (1.9), (1.10), получим

$$\Phi_*(z, \tau) = \Phi(z, \tau) + tP_1(z, \tau) + o(t), \tag{1.19}$$

где

$$P_1(z, \tau) = \frac{A}{\Phi(z, \tau) - \Phi(\xi, \tau)} + \frac{\overline{A}}{\Phi(z, \tau) - \overline{\Phi(\xi, \tau)}} +$$

$$+ \frac{A}{[\Phi_z'(\xi, \tau)]^2}\,\frac{\Phi_z'(z, \tau)}{\xi - z} + \frac{\overline{A}}{[\overline{\Phi_z'(\xi, \tau)}]^2}\,\frac{\Phi_z'(z, \tau)}{\bar\xi - z}. \tag{1.20}$$

Функция $\Phi_*(F(w, \tau), \tau) = w^*(w, \tau)$ отображает область B_τ на B_τ^*; ее разложение по степеням t имеет, согласно (1.19), (1.20), вид:

$$w^*(w, \tau) = w + tP_2(w, \tau) + o(t), \tag{1.21}$$

где

$$P_2(w, \tau) = \frac{A}{w - \omega} + \frac{\overline{A}}{w - \bar\omega} + \frac{A}{[\Phi_z'(F(\omega, \tau), \tau)]^2}\,\frac{[F_w'(w, \tau)]^{-1}}{F(\omega, \tau) - F(w, \tau)} +$$

$$+ \frac{\overline{A}}{[\overline{\Phi_z'(F(\omega, \tau), \tau}]^2}\cdot\frac{[F_w'(w, \tau)]^{-1}}{F(\omega, \tau) - F(w, \tau)}. \tag{1.22}$$

Здесь $\omega = \Phi(\xi, \tau)$. Подставляя в (1.21) (1.22), получаем при малых $t > 0$ для функции $f_*(z) = w^*(f(z), \tau) \in H^1$, отображающей Π^+ на B_τ^*, представление:

$$f_*(z) = f(z) + tP(z, \tau) + o(t), \tag{1.23}$$

где

$$P(z, \tau) = \frac{A}{f(z) - \Phi(\zeta, \tau)} + \frac{\overline{A}}{f(z) - \overline{\Phi(\zeta, \tau)}} +$$

$$+ \frac{A}{[\Phi_z'(\zeta, \tau)]^2}\cdot\frac{[F_w'(f(z), \tau)]^{-1}}{\zeta - F(f(z), \tau)} + \frac{\overline{A}}{[\overline{\Phi_z'(\zeta, \tau)}]^2}\cdot\frac{[F_w'(f(z), \tau)]^{-1}}{\bar\zeta - F(f(z), \tau)}. \tag{1.24}$$

Это и есть искомая вариация.

С использованием вариации (1.23), (1.24), рассуждая подобно предыдущему, приходим к следующему дифференциальному уравнению, которому должна удовлетворять присоединенная функция $F(w, \tau)$:

$$B(F, \tau)\,F_w'^2(w, \tau) = A(w), \tag{1.25}$$

где

$$A(w) = \frac{p}{(w - \xi)^2} + \frac{\bar p}{(w - \bar\xi)^2} + \frac{q}{w - \xi} + \frac{q}{w - \bar\xi}, \tag{1.26}$$

$$B(F, \tau) = \frac{p}{(F-a)^2} + \frac{\bar{p}}{(F-\bar{a})^2} + \frac{Q_1}{F-a} + \frac{\bar{Q}_1}{F-\bar{a}}, \tag{1.27}$$

$$\xi = f(z), \quad a = a(\tau) = F(\xi, \tau), \quad Q_1 = q\,[F'_w(\xi, \tau)]^{-1} + p\left\{\frac{d}{dw}\,[F'_w(w, \tau)]^{-1}\right\}_{w=\xi}.$$

Здесь величины p и q те же, что и в (1.16).

Отметим, что уравнение (1.16) получается из (1.25) при $\tau = 0$.

Из (1.26) с учетом равенства $\bar{q} = -q$ следует, что $A(w)$ представляет рациональную дробь вида

$$A(w) = \frac{P_2(w)}{(w-\xi)^2\,(w-\bar{\xi})^2}, \tag{1.28}$$

где $P_2(w)$ — полином от w степени не выше второй. Отсюда, учитывая (1.25) и равенства $\lim\limits_{w\to\infty} F(w, \tau)/w = 1$, $\lim\limits_{w\to\infty} F'_w(w, \tau) = 1$, $w \in B_\tau$, вытекающие из того, что $\Phi(z, \tau) \in H^1$, заключаем, что функция $B(F, \tau)$ допускает представление в виде

$$B(F, \tau) = \frac{Q_2(F)}{(F-a)^2\,(F-\bar{a})^2}, \tag{1.29}$$

где $Q_2(F, r)$ — полином от F степени не выше второй, причем коэффициенты при старших степенях w и F полиномов P_2 и Q_2 соответственно равны.

Итак, функция $F(w, \tau)$ удовлетворяет одновременно уравнениям (1.18) и (1.25). Запишем условие совместности этих уравнений, выразив $F''_{w\tau}$ из каждого и приравняв полученные выражения. Получим

$$\frac{\partial \log B}{\partial \tau} + \frac{1}{\mu - F}\cdot\frac{\partial \log B}{\partial F} + \frac{2}{(\mu-F)^2} = 0. \tag{1.30}$$

Учитывая теперь представление (1.29), найдем, что равенство (1.30) имеет место тогда и только тогда, когда

$$B(F, \tau) = B_0\,\frac{(F-\mu)^2}{(F-a)^2\,(F-\bar{a})^2}, \tag{1.29'}$$

где $B_0 = \mathrm{const}$, а функции $a = a(\tau)$ и $\mu = \mu(\tau)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{\mu - a}, \tag{1.31}$$

$$\mu - (a + \bar{a}) = \mathrm{const}. \tag{1.32}$$

Из (1.17), (1.25), (1.29′) следует, что

$$A(w) = A_0\,\frac{(w-\mu_1)^2}{(w-\xi)^2\,(w-\bar{\xi})^2}, \tag{1.28'}$$

где $A_0 = B_0$, $\mu_1 = \mu(\tau_0)$.

Далее, из (1.31), (1.32) имеем

$$\frac{d\log(\mu - a)}{d\tau} = \frac{1}{|\mu - a|^2},$$

откуда для $\arg(a - \mu)$ получаем

$$\beta \equiv \arg(a - \mu) = \mathrm{const}. \tag{1.33}$$

Обозначим

$$a = x + iy, \tag{1.34}$$

считая $x = x(\tau)$ и $y = y(\tau)$ вещественными. Из (1.31), отделяя вещественную и мнимую части и учитывая (1.33) и (1.34), находим

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\mu - x}{|\mu - a|^2} = -\frac{\cos\beta}{|\mu - a|}, \tag{1.35}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{y}{|\mu - a|^2} = \frac{\sin\beta}{|\mu - a|}. \tag{1.36}$$

Так как $y(\tau) > 0$, то, согласно (1.36), $y(\tau)$ — монотонно возрастающая функция τ. По (1.35), (1.36) $\dfrac{dx}{dy} = -\operatorname{ctg}\beta = \mathrm{const}$ и, значит,

$$x + y\operatorname{ctg}\beta = \mathrm{const}. \tag{1.37}$$

Далее, из (1.18) находим

$$\frac{\partial \log F'_w}{\partial \tau} = \frac{1}{(\mu - F)^2},$$

откуда при $w = f(z) = \xi$ интегрированием по τ в пределах от 0 до τ_0, принимая во внимание (1.17), (1.36) и (1.33) и равенства $y(0) = \operatorname{Im} F(\xi, 0) = \operatorname{Im} z$, $y(\tau_0) = \operatorname{Im} f(z)$, получаем

$$\log f'(z) = e^{-2i\beta}\log\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}. \tag{1.38}$$

Равенство (1.38) позволяет утверждать, что граничная точка $I_0 = (I_{10}, I_{20}, I_{30})$, доставляемая в D функцией f, лежит на поверхности конуса

$$I_1^2 = I_2^2 + I_3^2. \tag{1.39}$$

Так как для любой функции $f(z) \in H^1$ выполняется неравенство $\operatorname{Im} f(z) \geqslant \operatorname{Im} z$ [3, стр. 145] и так как по своему геометрическому смыслу величина β может находиться лишь в открытом интервале $(0, \pi)$, заключаем из (1.38), что собственные граничные точки могут лежать лишь на той части конуса (1.39), которая находится в полупространстве $I_1 \geqslant 0$, и не могут лежать на образующей конуса (1.39), уравнение которой (1.3).

Укажем теперь способ нахождения граничной функции, соответствующей любой наперед заданной точке I_0 конуса (1.39), $I_1 \geqslant 0$, отличной от точек прямой (1.3). Пусть выполняются равенства

$$\log\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} = I_{10}, \qquad \log|f'(z)| = I_{20}, \qquad \arg f'(z) = I_{30}, \tag{1.40}$$

где величины I_{k0}, $k = 1, 2, 3$, связаны соотношением

$$I_{10}^2 = I_{20}^2 + I_{30}^2. \tag{1.41}$$

Так как из (1.25), (1.28′) и (1.29′) при $w = f(\zeta)$, $\tau = 0$, следует, что $f(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{[f(\zeta) - \mu_1]^2}{[f(\zeta) - \xi]^2\,[f(\zeta) - \bar{\xi}]^2}\,f'^2(\zeta) = \frac{(\zeta - \mu_0)^2}{(\zeta - z)^2\,(\zeta - \bar{z})^2}, \tag{1.15'}$$

где $\mu_0 = \mu(0)$, то для полного решения поставленной задачи достаточно найти величины $\mu_1 = \mu(\tau_0)$, $\mu_0 = \mu(0)$, $\xi = f(z)$, к определению которых мы и переходим.

Согласно (1.33), (1.34) и (1.36),

$$a - \mu = \frac{y}{\sin\beta}\, e^{i\beta},$$

откуда при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ имеем

$$\mu_0 = x(0) - y(0)\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{Re} z - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{Im} z, \tag{1.42}$$

$$\mu_1 = x(\tau_0) - y(\tau_0)\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{Im} f(z). \tag{1.43}$$

Здесь величина $\operatorname{Im} f(z)$ задана вместе с I_{10}. Величину $\operatorname{Re} f(z)$ определим из (1.37). Для этого, приравнивая значения левой части (1.37), вычисленные при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, получим (1.5). Из (1.38), (1.40) с учетом (1.41) находим для определения величины β, $0 < \beta < \pi$, соотношение (1.7).

Переходим к определению границы Γ области $B_0 = f(\Pi^+)$. Записывая для этого уравнение (1.15) в виде

$$A(f)\, f'^2 = B(\zeta), \tag{1.15''}$$

получим для $f(\zeta)$ равенство

$$\int \sqrt{A(f)}\, df = \int \sqrt{B(\zeta)}\, d\zeta. \tag{1.44}$$

Обозначим результат интегрирования правой части (1.44) через $C(\zeta)$ и покажем, что на вещественной оси $\operatorname{Im}\zeta = 0$ величина $\operatorname{Im} C(\zeta)$ сохраняет постоянное значение, равное нулю. Действительно, на $\operatorname{Im}\zeta = 0$ имеем, как видно из (1.15'), $B(\zeta) \geqslant 0$ и, следовательно, $\operatorname{Im}\sqrt{B(\zeta)} = 0$. Поэтому на $\operatorname{Im}\zeta = 0$

$$\frac{d}{d\zeta}\operatorname{Im} C(\zeta) = \operatorname{Im} C'(\zeta) = \operatorname{Im}\sqrt{B(\zeta)} = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{Im} C(\zeta) = \mathrm{const}, \qquad \operatorname{Im}\zeta = 0. \tag{1.45}$$

Выполняя в (1.44) интегрирование, с учетом (1.45) получим

$$\operatorname{Im}\log\left[(f-\xi)^M (f-\bar\xi)^{1-M}\right] = \mathrm{const}, \qquad \operatorname{Im}\zeta = 0, \tag{1.46}$$

где

$$M = \frac{\xi - \mu_1}{\xi - \bar\xi} = \frac{1}{2}(1 - i\operatorname{ctg}\beta). \tag{1.47}$$

Из (1.46), (1.47) после простых преобразований придем к следующему соотношению для $f(\zeta)$, справедливому при $\operatorname{Im}\zeta = 0$, и которое, следовательно, можно рассматривать как уравнение границы области B_0:

$$\arg(f-\xi) + \arg(f-\bar\xi) - \operatorname{ctg}\beta \log\left|\frac{f-\xi}{f-\bar\xi}\right| = \mathrm{const}.$$

Рассмотрение этого соотношения при любом вещественном f показывает, что константа справа равна нулю. Этим доказано уравнение (1.8). Непосредственно из (1.15') следует, что разрез Γ в точке $w = \mu_1$ образует с вещественной осью $\operatorname{Im} w = 0$ прямой угол.

Наконец, сама функция $f(\zeta)$, как показывает интегрирование (1.15'), удовлетворяет уравнению (1.4).

Теорема полностью доказана.

§ 2. Взаимный рост $\operatorname{Im} f(z)$, $|f'(z)|$, $\arg f'(z)$

Теорема 1 может быть использована для получения оценок величин $\operatorname{Im} f(z)$, $|f'(z)|$ и $\arg f'(z)$. Укажем в качестве применения теоремы следующие результаты.

Следствие 1. *В классе H^1 функций $f(z)$ для любого $z \in \Pi^+$ справедлива точная оценка*

$$|\log f'(z)| \leqslant \log\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}. \tag{2.1}$$

Это неравенство вытекает непосредственно из (1.2).

Следствие 2. *Каковы бы ни были вещественные l, m, n, $l > 0$, $l^2 \geqslant m^2 + n^2$, в произвольной точке $z \in \Pi^+$ имеет место точная в H^1 оценка*

$$\left(\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}\right)^l |f'(z)|^m e^{n\arg f'(z)} \geqslant 1. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) равносильно указанию мажорантного для области D значений системы (1.1) полупространства, ограниченного плоскостью

$$lI_1 + mI_2 + nI_3 = 0. \tag{2.3}$$

Неравенство $l^2 > m^2 + n^2$ определяет условие непересечения конуса (1.39) плоскостью (2.3), в то время как равенство $l^2 = m^2 + n^2$ — условие касания конуса плоскостью по образующей. Точность оценки (2.2) понимается в следующем смысле. Если $l^2 > m^2 + n^2$, то знак равенства в (2.2) имеет место лишь при $f(z) = z$. Если $l^2 = m^2 + n^2$, то всегда, за исключением случая $n = 0$, $m = -l$, в H^1, кроме функции $f(z) = z$, найдется еще бесчисленное множество функций, доставляющих знак равенства в (2.2) (способ нахождения таких функций описан в теореме 1). В исключенном случае ($n = 0$, $m = -l$) равенство в (2.2) достигается в H^1 также для одной лишь тождественной функции $f(z) = z$. Однако для любого $\varepsilon > 0$ и любого $z \in \Pi^+$ можно указать бесчисленное множество таких функций $f(z) \in H^1$, для которых значения левых частей в (2.2) будут находиться в промежутке $(1, 1+\varepsilon]$. Эти функции могут быть выбраны в H^1 как функции, доставляющие в D точки, расположенные достаточно близко к образующей (1.3) конуса.

Отметим, что оценки (2.1), (2.2) обобщают и усиливают некоторые оценки, найденные в работах [2—4].

Рассмотрением плоскостей с уравнениями $mI_2 + nI_3 = \pm p$, $p > 0$, ($p = \log q$, $q > 1$), и областей, отсекаемых этими плоскостями от множества (1.2), легко убедиться в том, что справедливо следующее

Следствие 3. *Пусть $f(z) \in H^1$ и при некоторых вещественных m и n в фиксированной точке $z \in \Pi^+$ выполняется условие*

$$|f'(z)|^m e^{n\arg f'(z)} \geqslant q, \qquad q > 1. \tag{2.4}$$

Тогда справедливы оценки

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \geqslant q^{\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}},$$

$$\left|\log|f'(z)| - \frac{pm}{m^2+n^2}\right| \leqslant \frac{|n|}{\sqrt{m^2+n^2}}\sqrt{\left(\log\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}\right)^2 - p_0^2},$$

$$\left|\arg f'(z) - \frac{pn}{m^2+n^2}\right| \leqslant \frac{|m|}{\sqrt{m^2+n^2}}\sqrt{\left(\log\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}\right)^2 - p_0^2},$$

где $p = \log q$, $p_0 = \dfrac{p}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Если, кроме того, (при $n \neq 0$) выполняется неравенство

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \leqslant q^{\frac{1}{|n|}},$$

то при $n > 0$ ($n < 0$) *имеем* $\arg f'(z) \geqslant 0$ ($\arg f'(z) \leqslant 0$).

то при $m > 0$ ($m < 0$) *имеем* $|f'(z)| \geqslant 1$ ($|f'(z)| \leqslant 1$); *если (при* $m \neq 0$) *выполняется неравенство*

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \leqslant q^{\frac{1}{|m|}},$$

Если в (2.4) знак неравенства изменить на противоположный и считать $q<1$, то в утверждении следствия нужно считать $p = -\log q$ и изменить знаки чисел m и n на противоположные.

Следствие 4. *Пусть* $f(z) \in H^1$ *и при некоторых вещественных* l, m, n, q, $q > 1$, *в фиксированной точке* $z \in \Pi^+$ *выполняется равенство*

$$\left(\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}\right)^l |f'(z)|^m e^{n \arg f'(z)} = q.$$

Обозначим $\Delta = l^2 - m^2 - n^2$, $p = \log q$. *Тогда*

1) *если* $\Delta > 0$, *то*

$$q^{\frac{1}{\Delta}(l - \sqrt{m^2+n^2})} \leqslant \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \leqslant q^{\frac{1}{\Delta}(l + \sqrt{m^2+n^2})},$$

$$q^{\frac{1}{\Delta}(-\sqrt{l^2-n^2} - m)} \leqslant |f'(z)| \leqslant q^{\frac{1}{\Delta}(\sqrt{l^2-n^2} - m)},$$

$$\frac{p}{\Delta}(-\sqrt{l^2-m^2} - n) \leqslant \arg f'(z) \leqslant \frac{p}{\Delta}(\sqrt{l^2-m^2} - n);$$

2) *если* $\Delta = 0$, *то*

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \geqslant q^{\frac{1}{2l}}$$

и при $m > 0$ ($m < 0$) *имеем*

$$|f'(z)| \leqslant q^{\frac{1}{2m}} \qquad \left(|f'(z) \geqslant q^{\frac{1}{2m}}\right),$$

а при $n > 0$ ($n < 0$) *имеем*

$$\arg f'(z) \leqslant \frac{p}{2n} \qquad \left(\arg f'(z) \geqslant \frac{p}{2n}\right);$$

3) *если* $\Delta < 0$, то

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \geqslant q^{\frac{1}{\Delta}(l - \sqrt{m^2+n^2})}$$

и при $|l| > |n|$, $ml > 0$ ($ml < 0$) *имеем*

$$|f'(z)| \leqslant q^{\frac{1}{\Delta}(\sqrt{l^2-n^2} - m)} \qquad \left(|f'(z)| \geqslant q^{\frac{1}{\Delta}(\sqrt{l^2-n^2} - m)}\right),$$

а при $|l| > |m|$, $nl > 0$ ($nl < 0$) *имеем*

$$\arg f'(z) \leqslant \frac{p}{\Delta}(\sqrt{l^2-m^2} - n) \qquad \left(\arg f'(z) \geqslant \frac{p}{\Delta}(\sqrt{l^2-m^2} - n)\right).$$

Доказательство может быть легко получено из рассмотрения плоскостей $lI_1 + mI_2 + nI_3 = p$ ($p = \log q$), пересекающих поверхность конуса (1.39) либо по эллипсу ($\Delta > 0$), либо по параболе ($\Delta = 0$), либо по гиперболе ($\Delta < 0$).

Следствие 5. *Пусть на множестве функций* $f(z) \in H^1$, *удовлетворяющих в произвольной фиксированной точке* $z \in \Pi^+$ *условию* $\operatorname{Im} f(z) \leqslant K$, *задан функционал*

$$J = \operatorname{Re}[e^{i\theta} f'(z)], \tag{2.5}$$

где θ — *любое вещественное число. Тогда при любом фиксированном* K, $K > \operatorname{Im} z$, *значение* J *принадлежит отрезку* $[J_1, J_2]$, *концевые точки которого определяются формулами*

$$J_{1,2} = \pm \cos\beta \left(\frac{K}{\operatorname{Im} z}\right)^{\cos\beta}, \tag{2.6}$$

где β — *вещественный корень уравнения*

$$\beta + \sin\beta \log \frac{K}{\operatorname{Im} z} = \theta + \pi l, \qquad l = 0,\ 1, \tag{2.7}$$

причем значению $l = 0$ ($l = 1$) *соответствует знак плюс (минус) в формуле* (2.6).

Из теоремы 1 вытекает, что задача об экстремуме I при фиксированном значении K равносильна следующей задаче на относительный экстремум: найти экстремум функции

$$I = e^{I_2} \cos(\theta + I_3) \tag{2.5'}$$

(как функции двух переменных I_2, I_3) при условии выполнения неравенства

$$I_2^2 + I_3^2 \leqslant \left(\log \frac{K}{\operatorname{Im} z}\right)^2. \tag{2.8}$$

Убеждаясь, что внутри круга (2.8) функция (2.5′) не имеет стационарных точек, и решая задачу при условии, что в (2.8) имеет место равенство, легко получить сформулированный результат.

Этот результат был получен ранее иным путем в работе [3].

Прежде чем переходить к изложению дальнейших результатов, дадим ряд определений.

Классом H^1_* назовем совокупность всех функций $w = f(z) \in H^1$, удовлетворяющих в Π^+ условию

$$f(z) = -\overline{f(-\bar{z})}. \tag{2.9}$$

Множество всех функций $f(z)$, регулярных и однолистных в Π^+, удовлетворяющих условию

$$f(z) = \overline{f(-\bar{z})} \tag{2.10}$$

и нормированных условием

$$\lim_{z \to \infty} [f(z) - z^2] = 0, \qquad z \in \Pi^+, \tag{2.11}$$

обозначим через H^2.

Классом H^1_L (H^2_L) назовем совокупность всех функций $w = f(z)$ класса H^1 (H^2), отображающих Π^+ на области, граница которых при достаточно больших $|\operatorname{Re} w|$ ($\operatorname{Re} w > 0$) совпадает с вещественной осью $\operatorname{Im} w = 0$.

Любая функция $f(z) \in H^k_L$, $k = 1, 2$, в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки может быть по принципу симметрии Шварца продолжена во всю эту окрестность и, следовательно, допускает в ней разложение в ряд Лорана

$$f(z) = z^k + \frac{c_{-k}}{z^k} + \dots \tag{2.12}$$

с вещественными коэффициентами.

Обозначим через H_{L0}^1 подкласс класса H_L^1, содержащий функции, регулярные на полуоси $[-\infty, 0]$. Между множествами функций классов H_{L0}^1 и H_L^2 может быть установлено взаимно однозначное соответствие по следующему правилу: $f_2(z) \equiv f_1(z^2) \in H_L^2$, если $f_1(z) \in H_{L0}^1$, и, обратно, $f_1(z) \equiv f_2(z^{1/2}) \in H_{L0}^1$, если $f_2(z) \in H_L^2$.

Возьмем произвольную функцию $f_2(z) \in H_L^2$. Пусть $f_1(z)$ — соответствующая ей функция из H_{L0}^1. Для $f_1(z)$ (как функции H^1) по (2.1) в любой точке $\zeta \in \Pi^+$ справедливо неравенство

$$|\log f_1'(\zeta)| \leqslant \log \frac{\operatorname{Im} f_1(\zeta)}{\operatorname{Im} \zeta}.$$

Полагая здесь z^2 вместо ζ, получим

$$\left|\log \frac{f_2'(z)}{2z}\right| \leqslant \log \frac{\operatorname{Im} f_2(z)}{2 \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}.$$

Отсюда, учитывая плотность класса H_L^2 во всем классе H^2 относительно равномерной сходимости внутри Π^+, имеем следствие.

Следствие 6. *В классе H^2 функций $f(z)$ для любой точки $z \in \Pi^+$ справедлива точная оценка*

$$\left|\log \frac{f'(z)}{2z}\right| \leqslant \log \frac{\operatorname{Im} f(z)}{2 \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}. \tag{2.13}$$

Этот результат обобщает и усиливает результаты [8], найденные параметрическим методом.

Пусть теперь $f_1(z) \in H_{*L}^1$, где под H_{*L}^1 будем понимать подкласс функций из H_L^1, являющихся одновременно функциями класса H_*^1 ($H_{*L}^1 = H_*^1 \cap H_L^1$). Так как $f_2(z) = f_1^2(z)$ может отличаться от функции класса H_L^2 только вещественным слагаемым, то для функции $f_2(z)$ имеем при $\operatorname{Re} z \neq 0$ неравенство (2.13), а, значит, для $f_1(z) \in H_{*L}^1$ неравенство

$$\left|\log \frac{f_1(z) f_1'(z)}{z}\right| \leqslant \log \frac{\operatorname{Re} f_1(z) \operatorname{Im} f_1(z)}{\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}, \qquad \operatorname{Re} z \neq 0.$$

Учитывая вновь плотность подкласса H_{*L}^1 в H_*^1, получаем следующее следствие.

Следствие 7. *В классе H_*^1 функций $f(z)$ для любой точки $z \in \Pi^+$, $\operatorname{Re} z \neq 0$, справедлива точная оценка*

$$\left|\log \frac{f(z) f'(z)}{z}\right| \leqslant \log \frac{\operatorname{Re} f(z) \operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}. \tag{2.14}$$

Знак равенства в (2.14) имеет место для $f(z) = [z^2 - h^2]^{1/2} \in H_*^1$, h — вещественно.

В качестве следствий теоремы 1 могут быть получены также результаты, характеризующие звездность линий уровня $L(f, y)$ — образов прямых $\operatorname{Im} z = y$, $y > 0$, при отображении $w = f(z) \in H^1$.

Дугу Γ линии уровня $L(f, y)$ назовем α-звездной в направлении мнимой оси, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, если всякая прямая, образующая с мнимой осью $\operatorname{Re} w = 0$ острый угол, не превышающий по абсолютной величине α, пересекает Γ не более, чем в одной точке.

Следствие 8. *Пусть $f(z) \in H^1$ и в каждой точке отрезка $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$ прямой $\operatorname{Im} z = y$, $y > 0$, выполняется условие*

$$\left(\log \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}\right)^2 - (\log |f'(z)|)^2 < \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2. \tag{2.15}$$

Тогда дуга линии уровня $L(f, y)$, отвечающая этому отрезку, будет α-звездной в направлении мнимой оси.

Утверждение следствия вытекает из следствия 1 и характеристического условия α-звездности в направлении мнимой оси, имеющего для дуг линии уровня $L(f, y)$ вид

$$|\arg f'(z)| < \frac{\pi}{2} - \alpha, \qquad \operatorname{Im} z = y. \tag{2.16}$$

Усиливая неравенство (2.15), требуя, чтобы было

$$\log \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} < \frac{\pi}{2} - \alpha, \tag{2.17}$$

придем к такому результату.

Следствие 9. *Для каждого α, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, существует такая постоянная k_α, что всякая дуга линии уровня $L(f, y)$, $f \in H^1$, $y > 0$, лежащая в полосе $y < \operatorname{Im} w < k_\alpha y$, является α-звездной в направлении мнимой оси. Но для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f_\varepsilon \in H^1$, что некоторая дуга линии уровня $L(f_\varepsilon, y)$ не будет α-звездной в направлении мнимой оси, хотя она и лежит в полосе $y < \operatorname{Im} w < (k_\alpha + \varepsilon) y$. Величина k_α равна $e^{\frac{\pi}{2} - \alpha}$.*

§ 3. Рост вещественной и мнимой частей функции в зависимости от величины начального коэффициента разложения функции класса H^1

Рассмотрим класс функций H_L^1. Как было уже отмечено выше, произвольная функция $f(z) \in H_L^1$ в окрестности бесконечно удаленной точки может быть разложена в ряд

$$f(z) = z + \frac{\{f\}_{-1}}{z} + \dots \tag{3.1}$$

с вещественными коэффициентами.

Определим на H_L^1 систему вещественных функционалов

$$I(f) = \left(\log \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}, \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} z, \{f\}_{-1}\right). \tag{3.2}$$

Пусть $f(z)$ пробегает весь класс H_L^1; z — фиксированная точка из Π^+.

Класс H_L^1 образует нормальное семейство функций. Поэтому, если значения величин

$$I_1(f) = \log \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}, \qquad I_2(f) = \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} z$$

считать фиксированными и равными соответственно I_{10} и I_{20}, то множество функций $f(z)\in H_L^1$, удовлетворяющих условиям

$$I_1(f)=I_{10},\qquad I_2(f)=I_{20},$$

является уже компактным в себе относительно равномерной сходимости внутри Π^+. Следовательно, для каждой фиксированной пары конечных допустимых* значений I_{10}, I_{20} существует функция $f(z)\in H_L^1$, доставляющая экстремальное значение величине $I_3(f)=\{f\}_{-1}$, которое обозначим через I_{30}.

Назовем функцию $f(z)$, удовлетворяющую перечисленным условиям, граничной функцией системы (3.2) на H_L^1, а соответствующую точку $I_0=(I_{10}, I_{20}, I_{30})$ — граничной точкой.

Итак, для определения в R^3 множества значений системы (3.2), заданной на H_L^1, достаточно определить все граничные точки этой системы. Следующая теорема дает решение поставленной задачи.

Теорема 2. *Пусть на H_L^1 задана система функционалов (3.2) со значениями в R^3. Тогда область D значений этой системы дается соотношениями*

$$-I_3\geqslant\frac{I_2^2}{I_1}+\frac{1}{2}(\operatorname{Im}z)^2(e^{2I_1}-1),\qquad I_1\geqslant 0. \tag{3.3}$$

Граничные функции $f(\zeta)$ системы (3.2), доставляющие в D точки $I_0=(I_{10}, I_{20}, I_{30})$, удовлетворяют уравнению

$$\Lambda(f,\xi)-\Lambda(\zeta,z)+I_{20}=c\log\frac{f-\operatorname{Re}\xi+\Lambda(f,\xi)}{z-\operatorname{Re}z+\Lambda(\zeta,z)},$$

где под $\Lambda(\omega,\sigma)$ понимается та ветвь радикала

$$\Lambda(\omega,\sigma)=\sqrt{(\omega-\sigma)(\omega-\bar{\sigma})},$$

которая удовлетворяет условию

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\Lambda(\omega,\sigma)}{\omega}=1.$$

Параметры ξ и c определяются равенствами

$$\xi=\operatorname{Re}z+I_{20}+ie^{I_{10}}\operatorname{Im}z,$$

$$c=\frac{I_{20}}{I_{10}}.$$

Граничные функции $w=f(\zeta)$ отображают Π^+ на области, получаемые из полуплоскости $\operatorname{Im}w>0$ удалением аналитического разреза, вдоль которого выполняется равенство

$$\operatorname{Im}\Lambda(w,\xi)=c\arg[w-\operatorname{Re}\xi+\Lambda(w,\xi)].$$

Способ доказательства этой теоремы вполне аналогичен изложенному при доказательстве теоремы 1, и поэтому мы приводить его не будем. Укажем ряд следствий теоремы 2.

Следствие 1. *Если $f\in H_L^1$, то $\{f\}_{-1}\leqslant 0$. Равенство $\{f\}_{-1}=0$ возможно лишь для тождественной функции $f(z)=z\in H_L^1$.*

* Т. е. из областей изменения величин $I_1(f)$ и $I_2(f)$ на H_L^1.

Следствие 2. *Пусть $f\in H_L^1$ и в некоторой точке $z\in\Pi^+$ выполняются равенства*

$$|\operatorname{Re}f(z)-\operatorname{Re}z|=r,$$

$$\operatorname{Im}f(z)=k\operatorname{Im}z,\qquad k>1.$$

Тогда

$$|\{f\}_{-1}|\geqslant\frac{r^2}{\log k}+\frac{1}{2}(\operatorname{Im}z)^2(k^2-1).$$

Следствие 3. *Пусть $f\in H_L^1$. Тогда*

1) *если хотя бы в одной точке $z\in\Pi^+$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{Im}f(z)\geqslant k\operatorname{Im}z,\qquad k>1,$$

то

$$|\{f\}_{-1}|\geqslant\frac{1}{2}(\operatorname{Im}z)^2(k^2-1);$$

2) *если хотя бы в одной точке $z\in\Pi^+$ выполняется неравенство*

$$|\operatorname{Re}f(z)-\operatorname{Re}z|\geqslant r,$$

то

$$|\{f\}_{-1}|\geqslant\frac{r^2}{t_0}+\frac{1}{2}(\operatorname{Im}z)^2(e^{2t_0}-1),$$

где t_0 — (положительный) корень уравнения

$$te^t=\frac{r}{\operatorname{Im}z}.$$

Следствия 1, 2 и первая часть следствия 3 очевидным образом вытекают из теоремы 2. Что касается утверждения 2) следствия 3, то оно легко получается как результат решения следующей задачи на условный экстремум: найти экстремум функции $I_2^2/I_1+\frac{1}{2}(\operatorname{Im}z)^2(e^{2I_1}-1)$ переменных I_1, I_2 при условии $I_2^2\geqslant r^2$.

Очевидно также и следующее предложение.

Следствие 4. *Пусть $D_c(y)$, $c>0$, $y>0$, — область (в R^2) изменения системы $J(f)$ функционалов I_1, I_2:*

$$J(f)=\left(\log\frac{\operatorname{Im}f(z)}{\operatorname{Im}z},\ \operatorname{Re}f(z)-\operatorname{Re}z\right),\qquad\operatorname{Im}z=y, \tag{3.4}$$

заданной на множестве функций $f\in H_L^1$, удовлетворяющих условию $\{f\}_{-1}=-c$. Тогда область $D_c(y)$ характеризуется неравенствами

$$\frac{I_2^2}{I_1}+\frac{1}{2}y^2(e^{2I_1}-1)\leqslant c,\qquad I_1\geqslant 0. \tag{3.5}$$

Все точки границы $\Gamma_c(y)$ области $D_c(y)$, за исключением точки $(0,0)$ принадлежат $D_c(y)$.

Элементарное исследование уравнения границы $\Gamma_c(y)$ показывает, что $D_c(y)$ представляет выпуклую, симметричную относительно оси OI_1 область с гладкой границей. Для координат I_1, I_2 любой точки кривой $\Gamma_c(y)$ справедливы неравенства

$$0<I_1\leqslant\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2c}{y^2}\right), \tag{3.6}$$

$$|I_2|\leqslant t_0e^{t_0}y, \tag{3.7}$$

где t_0 — (положительный) корень уравнения

$$e^{2t}(1+2t) = 1 + \frac{2c}{y^2}. \tag{3.8}$$

Из (3.6) — (3.8) вытекает следующее следствие.

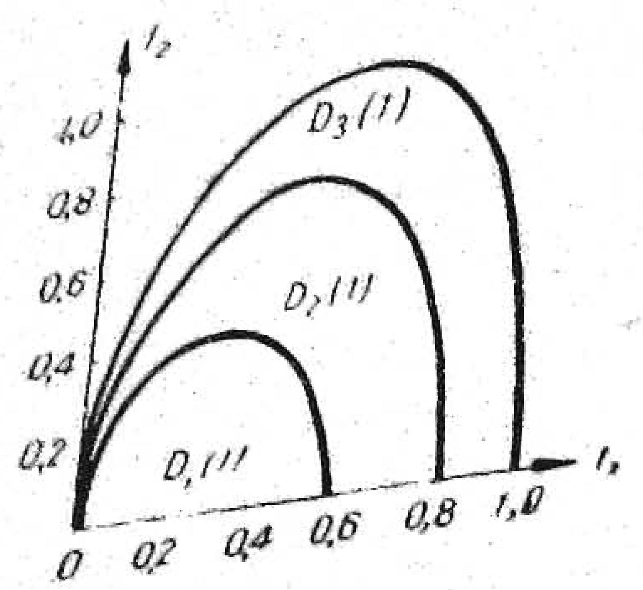

Рис. 1.

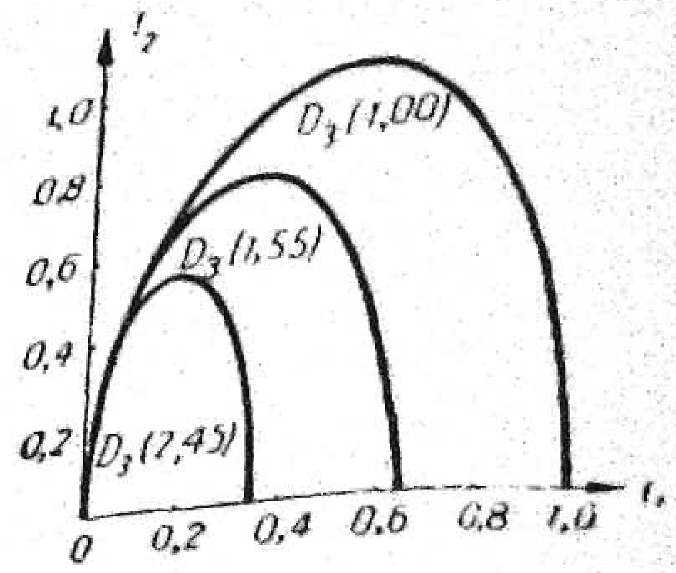

Рис. 2.

Следствие 5. *Пусть* $f \in H_L^1$ *и* $\{f\}_{-1} = -c$, $c > 0$. *Тогда в любой точке* $z \in \Pi^+$ *справедливы оценки*

$$\operatorname{Im} z < \operatorname{Im} f(z) \leqslant \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + 2c}, \tag{3.9}$$

$$\operatorname{Re} z - t_0 e^{t_0} \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Re} f(z) \leqslant \operatorname{Re} z + t_0 e^{t_0} \operatorname{Im} z, \tag{3.10}$$

где t_0 — *(положительный) корень уравнения* (3.8).

Оценки (3.9) и (3.10) точные в H_L^1, т. е. каковы бы ни были $z \in \Pi^+$ и $c > 0$, в H_L^1 найдутся функции $f(z)$, $\{f\}_{-1} = -c$, доставляющие знаки равенства в (3.10) и в правую часть (3.9). Кроме того, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такая $f_\varepsilon \in H_L^1$, $\{f_\varepsilon\}_{-1} = -c$, что будет $0 < \operatorname{Im} f_\varepsilon(z) - \operatorname{Im} z \leqslant \varepsilon$.

Оценки (3.9), (3.10) равносильны указанию в плоскости I_1, I_2 прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, мажорирующего область $D_c(y)$ и касающегося замкнутой области $\overline{D_c(y)}$ в точках $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{2c}{y^2}\right), 0\right)$, $(t_0, t_0 e^{t_0} \operatorname{Im} z)$, $(t_0, -t_0 e^{t_0} \operatorname{Im} z)$.

Отметим еще два свойства областей $D_c(y)$. Из (3.6) и (3.5) видно, что $D_c(y_1) \supset D_c(y_2)$ при $y_1 < y_2$ и $D_{c_1}(y) \supset D_{c_2}(y)$ при $c_1 > c_2$. Наглядное представление о виде $D_c(y)$ и ее зависимости от параметров c и y дают рис. 1, 2*.

Из (3.9) и следствия 1 теоремы 1 получаем следующее следствие.

Следствие 6. *Если* $f \in H_L^1$ *и* $\{f\}_{-1} = -c$, $c > 0$, *то в любой точке* $z \in \Pi^+$ *справедлива оценка*

$$|\log f'(z)| \leqslant \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{2c}{(\operatorname{Im} z)^2}\right). \tag{3.11}$$

Из (3.11), в частности, следует, что если $\operatorname{Im} z > (2c)^{1/2}(e^{\pi - 2\alpha} - 1)^{-1/2}$, $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $|\log f'(z)| < \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отсюда, учитывая условие (2.16), дающее

* На рис. 1, 2 изображены лишь половины симметричных относительно оси OI_1 областей $D_c(y)$.

необходимое и достаточное условие α-звездности в направлении мнимой оси дуг линии уровня $L(f, y)$, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Следствие 7. *Пусть* $f \in H_L^1$, $\{f\}_{-1} = -c$, $c > 0$, *и* α, $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, — *произвольное число. Тогда любая дуга линии уровня* $L(f, y)$ *при* $y > (2c)^{\frac{3}{2}} \times (e^{\pi - 2\alpha} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ *будет* α-*звездной в направлении мнимой оси, причем это утверждение не может быть усилено без наложения дополнительных условий на функцию* f.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй, Матем. сб., т. 4 (46), вып. 3.
2. Н. В. Попова, Исследование некоторых интегралов уравнения $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{w - \lambda(t)}$, Учен. зап. Новосибирского пед. ин-та, 8, 1949.
3. П. П. Куфарев, В. В. Соболев, Л. В. Спорышева, Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости. Вопросы геометрической теории функций, вып. 5, Тр. Томского ун-та, т. 200, 1968.
4. В В. Соболев, Область значений одной системы функционалов на классе функций, однолистных в полуплоскости, Материалы научн. конфер. преподават. матем. кафедр ин-тов Сибири, Новокузнецк, 1969.
5. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ НКТП, М., 1937.
6. Н. А. Лебедев, Об областях значений функционалов, заданных на классах аналитических функций, Автореферат док. дисс., Л., 1955.
7. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
8. В. В. Соболев, К вариационно-параметрическому методу П. П. Куфарева в одном классе функций, однолистных в полуплоскости, Материалы научн. конфер. преподават. матем. кафедр ин-тов Сибири, Новокузнецк, 1969.

Поступила 20.I 1970 г.
Донецкий вычислительный центр АН УССР