ство Орлича $\mathcal{L}^{*\Psi}(\Omega)$. Если φ - функция $\Psi(u)$ удовлетворяет Δ_2 - условию (см. [I]) при всех значениях $u\geq 0$, то условие (I8) одновременно является и достаточным, так как в этом случае из неравенства (I8) следует неравенство (I6).

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою искреннюю благодарность А.И.Поволоцкому за внимание к настоящей работе.

Цитированная литература

I. W.Matuszewska, Przestrzenie funkcji φ-całkowalnych I-II, Rocz. Pol. Tow. Matem., Ser.1, n.6, 1961r., p.121-139, 149-

2. М.А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, М., 1956.

3. М.А. Красносельский, Л.А. Ладыженский. Условия полной непрерывности оператора П.С. Урысона, действующего в пространствах $\mathcal{L}_p$, Труды Московск. Матем. об-ва, т.3, 1954.

4. W.Orlicz, Operations and linear functionals in spaces of φ-integrable functions, Bull. Acad. Pol. Sci., Vol.8, n.9, 1960, p.563-

5. И.П. Натансон. Теория функций вещественного переменного, Гостехиздат, М.-Л., 1957.

6. П.П. Забрейко. Нелинейные интегральные операторы, Труды семинара по функц. анализу. Выпуск 8, ВГУ, 1966, стр. 3-I48.

В.В.Соболев

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ОДНОЛИСТНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Важное место в исследованиях различных классов аналитических функций с точки зрения их экстремальных свойств относительно всевозможных функционалов, связанных с внутренними точками области задания функций, занимает метод параметрических представлений. Этот метод, предложенный впервые К.Левнером [I] для исследования однолистных в круге $E: |z|<1$ функций, в дальнейшем в ряде работ других авторов (Комацу, Г.М. Голузин, Ли Ен Пир, Н.А.Лебедев, П.П.Куфарев, М.Р.Куваев, И.А.Александров, А.С.Сорокин) получил распространение на однолистные отображения двусвязных областей на кольцо, на многолистные отображения круга E, на случай автоморфных в E функций и на случай однолистных отображений многосвязных областей.

В работе [I0] параметрический метод распространен на случай однолистных отображений, осуществляемых с помощью одного класса (в обозначениях настоящей статьи - класса H^1) голоморфных функций, заданных в полуплоскости. Там же дано применение этого метода к получению некоторых точных оценок.

В настоящей статье вопрос о параметрическом представлении функций класса H^1 рассмотрен с более общих позиций, чем в [I0]. Кроме того, даны параметрические представления еще одного класса однолистных в полуплоскости функций (класса H^2), а также одного подкласса класса H^1 (n°.2 §3).

§I. Определения и вспомогательные предложения

<u>Определение I</u>. Классом H^1 назовем совокупность всех функций $w=f(z)$, регулярных и однолистных в верхней полуплоскости $\Pi^+=\{z: \mathrm{Im}\, z>0\}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-z]=0 \quad, z\in\Pi^+, \tag{I.I}$$

принимающих значения в полуплоскости $\mathrm{Im}\, w>0$.

<u>Определение 2</u>. Классом H^2 назовем совокупность всех функций $w=f(z)$, регулярных и однолистных в Π^+, удовлетворяющих в Π^+ условиям

$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-z^2]=0, \tag{I.2}$$

$$f(z)=\overline{f(-\bar{z})}. \tag{I.3}$$

Рассмотрим функции $f(z)$ класса H^2. Они отображают Π^+ в области в плоскости w, симметричные относительно вещественной оси $\mathrm{Im}\, w=0$, причем образом мнимой полуоси $\mathrm{Re}\, z=0$, $\mathrm{Im}\, z>0$, является некоторая часть вещественной оси $\mathrm{Im}\, w=0$. Учитывая однолистность $f(z)$ и условие (I.2), отсюда заключаем, что для любой точки $z\in\Pi^+$ должно быть

$$\mathrm{Re}\, z \, \mathrm{Im} f(z) \geq 0. \quad (I.4)$$

Покажем теперь, что если $f(z)\in H^2$, то выполняется следующее равенство:

$$f'(z) = -\overline{f'(-\bar{z})}. \quad (I.5)$$

Для этого рассмотрим функцию

$$f^*(z)=\overline{f(\bar{z})}, \quad (I.6)$$

которая, очевидно, регулярна в нижней полуплоскости $\Pi^- = \{z: \mathrm{Im}\, z<0\}$. Равенство (I.3) с использованием (I.6) можно переписать в виде

$$f(z) = f^*(-z). \quad (I.7)$$

Отсюда дифференцированием по z с учетом (I.6) получаем (I.5).

Замечание. Равенство (I.5), так же как и неравенство (I.4), справедливо не только для функций $f(z)\in H^2$, но и вообще для регулярных и однолистных в Π^+ функций $f(z)$, удовлетворяющих соотношению (I.3) и условию $\lim\limits_{z\to\infty}[f(z)-z^2]=a_*$, где a_* - произвольная вещественная постоянная.

Дадим теперь в форме, необходимой для дальнейшего, решение задачи восстановления голоморфной в полуплоскости Π^+ непрерывной в замкнутой полуплоскости $\overline{\Pi^+}=\{z:\mathrm{Im}\, z\geq 0\}$ функции $\varphi(z)$ по заданной на границе Π^+ ее вещественной части $u(\xi)$ $(z=\xi+i\eta)$.

Как известно, решение этой задачи дается следующей формулой, носящей название интеграла Шварца для полуплоскости:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\frac{d\xi}{\xi - z} + ib, \ \mathrm{Im}\, z>0, \quad (I.8)$$

где b - произвольная действительная постоянная. Для сходимости интеграла (I.8) достаточно, например, чтобы $u(\xi)$ при $|\xi|\to\infty$ стремилась к нулю не медленнее, чем $|\xi|^{-\alpha}$, где $\alpha>0$ - произвольная постоянная [2, стр. 224].

Формуле (I.8) можно придать и другой смысл, несколько ослабив условие на $u(\xi)=\mathrm{Re}\,\varphi(\xi)$, а именно, считать, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет в $\overline{\Pi^+}$ условию

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=a+ib, \quad (I.9)$$

где a и b - действительные постоянные, но при этом интеграл в (I.8) следует понимать в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}. \quad (I.10)$$

Доказательство этого последнего утверждения содержится по существу, например, в [3, стр. 276-277].

Если условие (I.9) заменить требованием

$$\lim_{z\to\infty}[\varphi(z)-P(z)]=0, \quad (I.11)$$

где $P(z)$ - некоторый полином с вещественными коэффициентами, то при $z\in\Pi^+$ имеет место формула

$$\varphi(z)=P(z)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\,\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}, \quad (I.12)$$

которая является результатом непосредственного применения к функции $i[\varphi(z)-P(z)]$ формулы (I.8). В (I.12) интеграл также следует понимать в смысле главного значения.

§2. Уравнение Левнера для класса H^1

n°.1. Пусть в полуплоскости $\mathrm{Im}\, w>0$ заданы области без внешних точек, которые получаются как результат отображения Π^+ функциями $w=f(z)\in H^1$. Пусть B_0 - одна из них, Γ - часть ее границы, лежащая в $\mathrm{Im}\, w>0$.

Пусть $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ $\left(\bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j=\Gamma\right)$ - жордановы кривые, образующие плоские конечные графы, представляющие собой деревья, каждое из которых имеет ровно по одной вершине a_j°, $j=1,\dots,m$, лежащей на вещественной оси $\mathrm{Im}\, w=0$. Будем считать, что все деревья $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ попарно не связны.

Обозначим через $a_j^1,\dots,a_j^{N_j}$ все концевые (висячие) вершины дерева Γ_j, отличные от a_j°.

Введем в рассмотрение новый граф Γ_0, полученный из несвязного графа $\Gamma=\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma_j$ соединением его вершин $a_1^\circ,\dots,a_m^\circ$ отрезками прямых. Очевидно, Γ_0 - дерево с общим числом концевых вершин $N=\sum_{j=1}^{m} N_j$. Упорядочим произвольным образом эти вершины, введя для них единую нумерацию $a^1,\dots,a^N$. Пуст[ь] $\overline{a^1b^1},\dots,\overline{a^Nb^N}$ – компоненты регулярности I) соответственно кривых $\Gamma_0,\ \Gamma_0\setminus\gamma^1,\dots,\Gamma_0\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{N-1}\gamma^k$, где $\gamma^k=a^k\cup(a^kb^k)$, причем пересечение γ^k с множеством $\bigcup\limits_{j=1}^{m}a_j^\circ$ пусто при любом к, к = 1,...,N-1. Выберем теперь, следуя [5], некоторую систему полуинтервалов $[\tau_k,\tau_{k+1})$, $0=\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_N=\tau_0$, и функцию

$$w=\psi(\tau)\ ,\quad 0\le\tau\le\tau_0\ , \qquad (2.1)$$

отображающую топологически полуинтервал $[\tau_1,\tau_2)$ на дугу γ^1, полуинтервал $[\tau_2,\tau_3)$ на дугу γ^2 и т.д. Область $B_\tau=\{w: \Im w>0,\ w\ne\psi(t),\tau\le t\le\tau_0\}$ будет, очевидно, односвязной при любом $0\le\tau\le\tau_0$. Всякая функция

$$w=\psi^*(\tau)\ ,\quad 0\le\tau\le\tau_0\ , \qquad (2.2)$$

устанавливающая взаимнооднозначное соответствие между $[0,\tau_0]$ и множеством $\bigcup\limits_{j=1}^{m}(\Gamma_j\setminus a_j^\circ)=\bigcup\limits_{k=1}^{N-1}\gamma^k$ и такая, что область $B^*_\tau=\{w:\Im w>0,\ w\ne\psi^*(t),\ \tau\le t\le\tau_0\}$ при любом $0\le\tau\le\tau_0$ оказывается односвязной, обязана при N = I быть непрерывной. При $N\ge2$ число разрывов функции $w=\psi^*(\tau)$ на $[0,\tau_0]$ не может быть меньше, чем N - I. Пополняя деревья $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ новыми вершинами, лежащими внутри их стволов, число разрывов $\psi^*(\tau)$ можно сделать сколь угодно большим.

Отметим еще, что выбор функции $w=\psi^*(\tau)$, параметризующей несвязный граф Γ, зависит от способа нумерации концевых вершин дерева Γ_0. Поэтому области B_τ',B_τ^*, отвечающие различным параметризующим функциям $\psi(\tau), \psi^*(\tau)$, полученным с помощью различных способов нумерации, не могут совпадать при $N\ge2$.

n°.2. Покажем теперь, что при любом τ, $0\le\tau\le\tau_0$, в классе H^1 найдется единственная функция

$$w=\Phi(z,\tau), \qquad (2.3)$$

отображающая Π^+ на область B_τ.

I) Определение компонент регулярной кривой, а также обозначения открытых и замкнутых дуг, используемые в этом n°, см. [4, стр. 71-72, 94-97].

Для этого рассмотрим произвольную функцию $w=\Phi_1(\zeta,\tau)$, конформно отображающую полуплоскость $\Im\zeta>0$ на область B_τ. Эта функция по принципу симметрии Шварца в некоторой окрестности точки $\zeta=\infty$ может быть аналитически продолжена в $\Im\zeta<0$ и, следовательно, разлагается в этой окрестности в ряд Лорана вида

$$w=\Phi_1(\zeta,\tau)=a_1(\tau)\zeta+a_0(\tau)+\frac{a_{-1}(\tau)}{\zeta}+\dots \qquad (2.4)$$

с некоторыми вещественными $a_1(\tau), a_0(\tau), a_{-1}(\tau),\dots$. Полуплоскость $\Im\zeta>0$ допускает группу преобразований в себя вида

$$\zeta=az+b, \qquad (2.5)$$

оставляющих неподвижной бесконечно удаленную точку; a и b – вещественные, $a\ne0$. Рассматривая функцию

$$\Phi(z,\tau)=\Phi_1(az+b,\tau)=a_1(\tau)az+a_1(\tau)b+a_0(\tau)+\frac{a_{-1}(\tau)/a}{z}+\dots, \qquad (2.6)$$

отображающую Π^+ на B_τ, убеждаемся, что путем надлежащего выбора величин a, b в (2.5) для $w=\Phi(z,\tau)$ можно получить разложение

$$w=\Phi(z,\tau)=z+\frac{c_{-1}(\tau)}{z}+\dots, \qquad (2.7)$$

то есть $\Phi(z,\tau)\in H^1$.

Единственность функции $\Phi(z,\tau)\in H^1$ легко доказывается от противного.

Дадим теперь вывод одного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $z=F(w,\tau)$, обратная по отношению к $w=\Phi(z,\tau)$.

Пусть прежде N = I.

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega=h(z,\tau',\tau'')=F(\Phi(z,\tau'),\tau''),\quad 0\le\tau'<\tau''\le\tau_0; \qquad (2.8)$$

е разложение в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$\omega=h(z,\tau',\tau'')=z+\frac{c_{-1}(\tau')-c_{-1}(\tau'')}{z}+\dots . \qquad (2.9)$$

на конформно и однолистно отображает Π^+ на область, полученную из $\Im\omega>0$ удалением некоторого конечного разреза $S_{\tau'\tau''}$, начинающегося в точке $\omega=\mu(\tau'')$ вещественной оси; разрезу $S_{\tau'\tau''}$ в плоскости ω при отображении $\omega=h(z,\tau',\tau'')$ соответствует отрезок $B_{\tau'\tau''}: \alpha\le z\le\beta$ вещественной оси, содержащий точку $z=\mu(\tau')$.

С помощью формулы Шварца (1.12) при $\beta(z)=z$ получаем

$$h(z,\tau',\tau'')=z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}h(\xi,\tau',\tau'')\frac{d\xi}{\xi-z}. \tag{2.10}$$

Подставляя сюда $z=F(w,\tau')$, находим

$$F(w,\tau'')-F(w,\tau')=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\operatorname{Im}h(\xi,\tau',\tau'')\frac{d\xi}{\xi-F(w,\tau')} \tag{2.11}$$

и, следовательно,

$$c_{-1}(\tau')-c_{-1}(\tau'')=\lim_{w\to\infty}w[F(w,\tau'')-F(w,\tau')]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\operatorname{Im}h(\xi,\tau',\tau'')d\xi. \tag{2.12}$$

Из последней формулы видно, что $c_{-1}(\tau)$ - строго моно-тонно возрастающая функция от τ на $[0,\tau_0]$. То, что при $\tau''\to\tau'=\tau$ или $\tau'\to\tau''=\tau$ обе дуги $B_{\tau'\tau''}$, $S_{\tau'\tau''}$ стягиваются и $\mu(\tau)$ и $c_{-1}(\tau)$ и $\mu(\tau)$ - непрерывные функции от τ, до-казывается совершенно аналогично тому, как это сделано, на-пример, в [6, стр. 89-92]. Выбирая, наконец, параметр τ так, чтобы имело место равенство

$$c_{-1}(\tau)=\tau+\text{const} \tag{2.13}$$

и выполняя предельный переход $\tau''\to\tau'=\tau$ или $\tau'\to\tau''=\tau$, так аналогично [6] докажем, что функция $F(w,\tau)$ удовлетворяет уравнению типа Левнера

$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{1}{\mu(\tau)-F(w,\tau)},\quad 0\leq\tau\leq\tau_0, \tag{2.14}$$

а обратная к ней функция - уравнению

$$\frac{\partial\Phi(z,\tau)}{\partial\tau}+\frac{1}{\mu(\tau)-z}\cdot\frac{\partial\Phi(z,\tau)}{\partial z}=0,\quad 0\leq\tau\leq\tau_0. \tag{2.15}$$

Уравнения (2.14) и (2.15) остаются справедливыми и в т… случае, когда $N\geq 2$. При этом в уравнении (2.1) кривой $\psi(\tau)$, $0\leq\tau\leq\tau_0$, - кусочно-непрерывная функция параметра τ функция $\mu(\tau)$ допускает конечное число точек разрыва перво-го рода, причем точки разрыва её соответствуют тем значе-ниям τ, при переходе через которые точка $\psi(\tau)$ переходит с одной дуги γ^k на другую - γ^{k+1}, $k=1,\dots,N-1$.

Итак доказана

Теорема I. Пусть $f(z)\in H^1$ и отображает Π^+ на область

$\operatorname{Im}w>0$ без внешних точек, получающуюся из $\operatorname{Im}w>0$ про-ведением разрезов по конечному числу попарно несвязных де-ревьев, каждое из которых конечно и имеет один корень на оси $\operatorname{Im}w=0$. Тогда существует такая вещественная функция $\mu(\tau)$, $0\leq\tau\leq\tau_0$, непрерывная на $[0,\tau_0]$, за исключением конечного чис-ла точек разрыва первого рода, что $f(z)$ может быть получе-на как $f(z)=\Phi(z,0)$, где $\Phi(z,\tau)$ - интеграл уравнения (2.15), удовлетворяющий условию $\Phi(z,\tau_0)=z$.

Отметим, что уравнения (2.14), (2.15) ранее иным путем были получены Н.В.Поповой [7], однако выбор параметра τ ею не был указан.

п°.4. Наряду с описанным выше способом параметризации границы Γ области B_0, лежащей в $\operatorname{Im}w>0$, можно провести параметризацию также следующим образом.

Пусть каждая из компонент Γ_j, $j=1,\dots,m$, границы Γ за-дана параметрически уравнением

$$w=\psi_j(\tau),\quad 0\leq\tau\leq\tau_0,\quad j=1,2,\dots,m, \tag{2.1'}$$

где $\psi_j(\tau)$ - в общем случае - кусочно-непрерывная функция на $[0,\tau_0]$, то есть при изменении τ от 0 до τ_0 все граничные кривые Γ_j описываются одновременно. В этом случае вместо равенств (2.11), (2.12) будем соответственно иметь

$$F(w,\tau'')-F(w,\tau')=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\operatorname{Im}h(\xi,\tau',\tau'')\frac{d\xi}{\xi-F(w,\tau')}, \tag{2.11'}$$

$$c_{-1}(\tau'')-c_{-1}(\tau')=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\operatorname{Im}h(\xi,\tau',\tau'')d\xi, \tag{2.12'}$$

где $B_{j\tau'\tau''}:\alpha_j\leq z\leq\beta_j$ - отрезок вещественной оси $\operatorname{Im}z=0$, соот-ветствующий разрезу $S_{j\tau'\tau''}$ в плоскости ω при отображении $\omega=h(z,\tau',\tau'')$. Смысл обозначений $B_{j\tau'\tau''}$, $S_{j\tau'\tau''}$ ясен из пре-дыдущего. Отсюда рассуждениями, аналогичными предыдущим, по-добно [8], [9], получим

$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial\tau}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta_j(\tau)}{\mu_j(\tau)-F(w,\tau)}, \tag{2.14'}$$

$$\delta_j(\tau)=\lim_{\substack{\tau''\to\tau+0\\ \tau'\to\tau-0}}\frac{\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\operatorname{Im}h(\xi,\tau',\tau'')\,d\xi}{\sum_{i=1}^{m}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\operatorname{Im}h(\xi,\tau',\tau'')\,d\xi}\qquad(2.\ldots)$$

причем $\delta_1(\tau)>0,\ldots,\delta_m(\tau)>0$, $\delta_1(\tau)+\ldots+\delta_m(\tau)=1$, $\mu_j(\tau)$, $j=1,\ldots,m$, – в общем случае – кусочно-непрерывные функц... В качестве начального условия для решений дифференциальных уравнений (2.14), (2.14′) имеем равенство

$$F(w,\tau_0)=w.\qquad(2.1\ldots)$$

Замечание. Можно рассматривать, вообще говоря, и те... способы параметризации границы области B_0, при которых ... пользуются элементы каждого из первых двух уже описанн... способов, а именно, можно произвольно объединить по н... сколько деревьев из $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$ в отдельные графы и задава... параметрически каждый из графов, полученных таким объедин... нием, одной кусочно-непрерывной функцией от τ, $0\le\tau\le\tau_0$. При этом функция $F(w,\tau)$ будет, как и раньше, удовлетво... рять уравнению (2.14′) с той лишь разницей, что индекс су... мирования будет означать номер упомянутого объединенно... графа. Соответственно изменится и смысл величин $\delta_j(\tau)$.

Пример использования такой комбинированной параметриза... ции будет дан в следующем параграфе.

§3. Уравнение Левнера для класса H^2

п°.1. Рассмотрим в плоскости w области без внешних то... чек и такие, которые получаются как результат отображения Π^+ функциями $w=f(z)\in H^2$. Пусть B_0 – одна из них, Γ – ее грани... ца. Γ симметрична относительно оси $\operatorname{Im}w=0$ и содержит неко... торый бесконечный отрезок Γ_∞ вещественной оси $\operatorname{Im}w=0$. По... этому границу Γ можно представить в виде суммы связных ком... понент Γ_1 и Γ_1^*, каждая из которых лежит в полуплоскост... $\operatorname{Im}w\ge0$ и $\operatorname{Im}w\le0$ соответственно и является зеркальны... отображением одна другой относительно оси $\operatorname{Im}w=0$.[1/]

Зададим Γ_1 параметрически уравнением $w=\psi(\tau)$, $0\le\tau\le\infty$. Тогда уравнение всей границы Γ будет иметь вид

1/ Здесь Γ_1 и Γ_1^* играют роль тех объединенных графов, о которых шла речь в замечании п.4 §2.

$$w=\begin{cases}\psi(\tau), & 0\le\tau\le\infty,\\ \overline{\psi(\tau)}, & 0\le\tau\le\infty,\end{cases}\qquad(3.1)$$

чем обеспечивается симметричность относительно $\operatorname{Im}w=0$ области $B_\tau=\{w: w\ne\psi(t), w\ne\overline{\psi(t)}, \tau\le t\le\infty\}$ при любом $0\le\tau<\infty$.

Аналогично предыдущему можно показать, что при любом τ, $0\le\tau<\infty$, существует единственная функция $w=\Phi(z,\tau)$, отображающая конформно и однолистно Π^+ на B_τ и допускающая в окрестности $z=\infty$ разложение в ряд Лорана

$$w=\Phi(z,\tau)=z^2+a_0(\tau)+\frac{a_{-2}(\tau)}{z^2}+\ldots\qquad(3.2)$$

с вещественными $a_0(\tau), a_{-2}(\tau),\ldots$ Вводя далее в рассмотрение, как и раньше, функцию $\omega=h(z,\tau',\tau'')$ по формуле (2.8) $(\tau_0=\infty)$, легко убедиться, что эта функция принадлежит классу H^1 и ее разложение в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$\omega=h(z,\tau',\tau'')=z+\frac{1}{2}\,\frac{a_0(\tau')-a_0(\tau'')}{z}+\ldots.\qquad(3.3)$$

Выберем параметр τ, который находится в нашем распоряжении, так, чтобы было

$$a_0(\tau)=2\tau,\qquad(3.4)$$

и проведем все последующие рассуждения точно так же, как и раньше. Для функции $z=F(w,\tau)$ получим уравнение вида (2.14′) с $m=2$. Учитывая далее, что в силу свойства (1.3) в соответствии с (2.8) имеем при $\operatorname{Im}z\ge0$

$$h(z,\tau',\tau'')=F(\Phi(z,\tau'),\tau'')=F(\overline{\Phi(-\bar z,\tau')},\tau'')=$$
$$=-\overline{F(\Phi(-\bar z,\tau'),\tau'')}=-\overline{h(-\bar z,\tau',\tau'')}\qquad(3.5)$$

и поскольку, как ясно из предыдущего, $\beta_2=-\alpha_1$; $\alpha_2=-\beta_1$, получим из (2.16) $\delta_1=\delta_2=\frac{1}{2}$. Так как, кроме того, $\mu_1(\tau)=-\mu_2(\tau)\equiv\mu(\tau)$, получим окончательно

$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{F(w,\tau)}{\mu^2(\tau)-F^2(w,\tau)},\quad 0\le\tau\le\infty,\qquad(3.6)$$

а для обратной функции $w=\Phi(z,\tau)$ –

$$\frac{\partial\Phi(z,\tau)}{\partial\tau}+\frac{z}{\mu^2(\tau)-z^2}\cdot\frac{\partial\Phi(z,\tau)}{\partial z}=0,\ 0\le\tau\le\infty.\qquad(3.7)$$

Найдем теперь предельное соотношение для интеграла $F(w,\tau)$ уравнения (3.6) при $\tau \to \infty$.

Как уже было отмечено выше, граница Γ содержит бесконечный отрезок Γ_∞ оси $\operatorname{Im} w=0$. Поэтому, начиная с некоторого значения параметра $\tau=\tau_0, 0\le\tau_0\le\infty$, все ветви разреза Γ, отличные от Γ_∞, "сотрутся" и для $\tau\ge\tau_0$ границей области B_τ будет служить некоторая вещественная полуось плоскости w. Следовательно, для $\tau\ge\tau_0$ должно быть

$$w=\Phi(z,\tau)=k_2(\tau)z^2+k_1(\tau)z+k_0(\tau),$$

($k_2(\tau), k_1(\tau), k_0(\tau)$ - вещественны). Однако из (3.2) и (3.4) тотчас следует, что $k_2(\tau)=1, k_1(\tau)=0, k_0(\tau)=2\tau$, так что

$$\Phi(z,\tau)-2\tau=z^2, \quad \tau\ge\tau_0, \tag{3.8}$$

и, следовательно, имеем

$$\lim_{\tau\to\infty}[\Phi(z,\tau)-2\tau]=z^2, \quad z\in\Pi^+, \tag{3.9}$$

а для обратной функции $F(w,\tau)$ -

$$\lim_{\tau\to\infty}[F^2(w,\tau)+2\tau]=w, \quad w\in B_0. \tag{3.9'}$$

Это и есть искомое предельное соотношение.

Таким образом, нами доказана

<u>Теорема 2</u>. Пусть $f(z)\in H^2$ и отображает Π^+ на область в плоскости W без внешних точек, полученную из этой плоскости проведением разреза по конечному дереву с корнем в точке $w=\infty$. Тогда найдется такая вещественная функция $\mu(\tau)$, непрерывная при $0\le\tau\le\infty$ за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, что $f(z)$ может быть получена как $f(z)=\Phi(z,0)$, где $\Phi(z,\tau)$ - интеграл уравнения (3.7), удовлетворяющий соотношению (3.9).

n°2. Рассмотрим в плоскости W области, полученные из полуплоскости $\operatorname{Im} w>0$ проведением разрезов по дугам Жордана, образующим графы, описанные в n°.1 §2. Подчиним эти области дополнительному требованию симметрии относительно мнимой оси $\operatorname{Re} w=0$. Тогда можно считать, что соответствующие функции $\Phi(z,\tau)$ при любом τ, $0\le\tau\le\tau_0$ являются функциями класса H^1 и удовлетворяют условию

$$\Phi(z,\tau)=-\overline{\Phi(-\bar z,\tau)}. \tag{3.10}$$

Незначительно меняя детали доказательства предыдущего пункта, можно показать, что функции $F(w,\tau)$ и $\Phi(z,\tau)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (3.6) и (3.7) с некоторой кусочно-непрерывной вещественной функцией $\mu(\tau)$, $0\le\tau\le\tau_0$. В качестве начальных условий при этом, так же, как и в n°.3 §2, имеем соотношения $F(w,\tau_0)=w$, $\Phi(z,\tau_0)=z$.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность И.А.Александрову, оказавшему помощь при выполнении данной работы.

Литература

1. K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises, J. Math. Ann. , 1923, 89, 103-121.

2. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Наука, М., 1965.

3. Н.И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, М., 1966.

4. П.С. Александров. Комбинаторная топология. М.-Л., 1947.

5. В.И. Попов. Область значений одной системы функционалов на классе S. Вопросы геометрической теории функций, вып. 3, Тр. Томского ун-та, 1965, 182, 106-132.

6. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Наука, М., 1966.

7. Н.В. Попова. Зависимость между уравнениями Левнера и уравнением $\frac{dw}{dt}=\frac{1}{w-\lambda(\tau)}$. Изв. АН БССР, №6, 1954, 97-98.

8. E. Peschl, Zur Theorie der schlichten Funktionen, J. f. reine u. angew. Math., 1936, 176, 61-96.

9. В.С. Федорова. Об обобщенном уравнении Левнера. Учен. зап. Томского ун-та, 1947, 4, 19-24.

10. П.П. Куфарев, В.В. Соболев, Л.В. Спорышева. Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости. Вопросы геометрической теории функций, вып. 5. Тр. Томского ун-та, 1968, 200, 142-164.

К МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В КЛАССЕ H^2

В настоящей заметке, примыкающей к работе автора [I], используются обозначения и результаты, установленные в [I].

Важнейшее свойство уравнений типа Левнера для рассмотренных в [I] классов H^1 и H^2 заключается в том, что классы функций $f(z)$, фигурирующих в теоремах I и 2 работы [I], назовем их $\tilde{H}^1$ и $\tilde{H}^2$, получаемых из интегралов этих уравнений, являются плотными в самих классах H^1 и H^2 соответственно относительно равномерной сходимости внутри верхней полуплоскости Π^+. В силу этого свойства всякая оценка, установленная в $\tilde{H}^k$, $k = 1,2$, с использованием соответствующего параметрического представления, является справедливой одновременно и для всего класса H^k, $k = 1,2$.

Так, например, в работе [2] с помощью уравнения (2.I4) статьи [I] получены точные двусторонние оценки величин $|f'(z)|$ и $\arg f'(z)$ на классе H^1 в произвольной фиксированной точке $z\in\Pi^+$ в зависимости от величины $\operatorname{Im} f(z)$. Данная заметка содержит вывод аналогичных оценок для случая $f(z)\in H^2$.

Рассмотрим интегралы $F(w,\tau)$ уравнения

$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{F(w,\tau)}{\mu^2(\tau)-F^2(w,\tau)}\,,\quad 0\le\tau\le\infty\,, \tag{I}$$

удовлетворяющие соотношению

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[F^2(w,\tau)+2\tau\right]=w\,, \tag{2}$$

где $w\in B_0=f(\Pi^+)$, $f(z)\in H^2$. Обозначим через $X(w,\tau)$ и $Y(w,\tau)$ соответственно вещественную и мнимую части $F(w,\tau)$, то есть положим

$$F(w,\tau)=X(w,\tau)+i\,Y(w,\tau)\,. \tag{3}$$

При фиксированном w имеем из (I):

$$\frac{dX}{d\tau}=X\cdot\frac{\mu^2-X^2-Y^2}{|\mu^2-F^2|^2}\,, \tag{4}$$

$$\frac{dY}{d\tau}=Y\cdot\frac{\mu^2+X^2+Y^2}{|\mu^2-F^2|^2}\,. \tag{5}$$

которое вместе с равенством

$$\frac{d}{d\tau}\log F=\frac{1}{\mu^2-F^2}\,, \tag{I3}$$

полученным из (I), дает

$$\frac{d}{d\tau}\log FF'_w=\frac{2\mu^2}{(\mu^2-F^2)^2}\,. \tag{I4}$$

Рассмотрим функцию

$$V(\tau)=\log X(\tau)Y(\tau)\,. \tag{I5}$$

Она, согласно (II), монотонно не убывает, изменяясь, как видно из (7), в пределах от $V_0=\log X(0)Y(0)$ до $V_1=\log\left(\frac{1}{2}\operatorname{Im} w\right)$. Будем считать теперь V независимой переменной, а $\tau=\tau(V)$.

Из (II), (I4), (I5) имеем:

$$\frac{d}{dV}\log FF'_w=\frac{|\mu^2-F^2|^2}{(\mu^2-F^2)^2}\,,$$

следовательно,

$$d\log FF'_w=e^{-2i\arg(\mu^2-F^2)}dV\,. \tag{I6}$$

Интегрируя это соотношение по V в пределах от V до V_1, учитывая (8), получим

$$\log 2FF'_w=\int_{V_1}^{V}e^{-2i\arg(\mu^2-F^2)}dV\,. \tag{I7}$$

Отсюда следует, что

$$|\log|2FF'_w||\le V_1-V=\log\frac{\operatorname{Im} w}{2XY}\,,$$

а, значит,

$$\frac{2XY}{\operatorname{Im} w}\le|2FF'_w|\le\frac{\operatorname{Im} w}{2XY}\,.$$

Полагая здесь $w=\Phi(z,\tau)$, находим

$$\frac{2\operatorname{Re}z\operatorname{Im}z}{\operatorname{Im}\Phi(z,\tau)}\le\left|\frac{\Phi'_z(z,\tau)}{2z}\right|\le\frac{\operatorname{Im}\Phi(z,\tau)}{2\operatorname{Re}z\operatorname{Im}z}\,. \tag{I8}$$

Отсюда, учитывая возможность аппроксимации интегралами уравнения (3.7), (3.9) из [I] любой функции $f(z)$ класса H^2, делаем вывод, что для $f(z)\in H^2$ справедливы оценки

Из (5) видно, что, так как $Y>0$, $Y=Y(\tau)$ - моното[нно] возрастающая функция от τ.

Выясним поведение функций X, Y при $\tau\to\infty$. Из (2) имеем

$$\lim_{\tau\to\infty}[X^2-Y^2+2\tau+2iXY]=\mathrm{Re}\,w+i\,\mathrm{Im}\,w,$$

то есть

$$\lim_{\tau\to\infty}[X^2-Y^2+2\tau]=\mathrm{Re}\,w,$$

$$\lim_{\tau\to\infty}2XY=\mathrm{Im}\,w,$$

откуда следует, что $X\to 0$, $Y\to\infty$ при $\tau\to\infty$. Кроме того, из находим [1)]

$$\lim_{\tau\to\infty}2F(w,\tau)F'_w(w,\tau)=1.$$

Далее, так как функция $w=\Phi(z,\tau)$, обратная к $z=F(w$ удовлетворяет неравенству (I.4) из [I] (см. замечание §I[то имеет место неравенство

$$\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,\Phi(z,\tau)\geqslant 0,$$

а, значит, и неравенство

$$\mathrm{Re}\,F(w,\tau)\,\mathrm{Im}\,w\geqslant 0.$$

Из последнего следует, что при фиксированном w функция $\mathrm{Re}\,F$ (как функция τ) знакопостоянна во всей области $0\leqslant\tau\leqslant$

В силу известного свойства симметрии достаточно, очеви[дно], различать лишь два случая: $\mathrm{Im}\,w>0$ и $\mathrm{Im}\,w=0$.

Пусть $\mathrm{Im}\,w>0$. Тогда по (10) $X>0$ и из (4), (5) на[хо]дим

$$\frac{d}{d\tau}\log XY=\frac{2\mu^2}{|\mu^2-F^2|^2}.$$

Из (I) дифференцированием находим еще равенство

$$\frac{d}{d\tau}\log F'_w=\frac{\mu^2+F^2}{(\mu^2-F^2)^2},$$

I/ В равенствах (6)-(8) вместо предела при $\tau\to\infty$ можно [пи]сать предел при $\tau\to\tau_0$, где τ_0, $\tau_0>0$, означает то ми[ни]мальное на $[0,\infty]$ значение параметра τ, при котором [об]ласть B_τ представляет всю плоскость с разрезом по [дей]ственной полуоси.

$$\frac{2\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Im}\,f(z)}\leqslant\left|\frac{f'(z)}{2z}\right|\leqslant\frac{\mathrm{Im}\,f(z)}{2\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,z}. \qquad (19)$$

Оценивая далее из (17) мнимую часть, придем к следующим оценкам:

$$\log\frac{2\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Im}\,f(z)}\leqslant\arg\frac{f'(z)}{z}\leqslant\log\frac{\mathrm{Im}\,f(z)}{2\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,z}. \qquad (20)$$

Напомним, что неравенства (19), (20) справедливы при $\mathrm{Re}\,z>0$, а, значит, и при $\mathrm{Re}\,z<0$.

Переходим к рассмотрению второго случая.

Пусть $\mathrm{Im}\,w=0$. В этом случае $X=0$ для всех τ, $0\leqslant\tau\leqslant\infty$. Введем в рассмотрение функцию

$$U(\tau)=2\tau-Y^2(\tau). \qquad (21)$$

Дифференцируя (21) по τ и учитывая равенство (5) и то, что $X=0$, получим

$$\frac{dU}{d\tau}=\frac{2\mu^2}{\mu^2+Y^2}, \qquad (22)$$

то есть $U(\tau)$ - монотонно неубывающая функция, изменяющаяся в пределах от $U_0=U(0)=-Y^2(0)$ до $U_1=U(\infty)=\mathrm{Re}\,w$. Последнее следует из (6). Итак, при любом τ, $0\leqslant\tau\leqslant\infty$, имеем

$$-Y^2(0)\leqslant U(\tau)\leqslant\mathrm{Re}\,w.$$

Далее, так как при $X=0$ из (14) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\log FF'_w=\frac{2\mu^2}{\mu^2+Y^2}, \qquad (23)$$

то отсюда и из (22) находим

$$d\log FF'_w=\frac{dU}{\mu^2+Y^2}. \qquad (24)$$

Интегрируя это равенство по U в пределах от U до U_1, получим

$$-\log 2FF'_w=\int_U^{U_1}\frac{dU}{\mu^2+Y^2}. \qquad (25)$$

[В] правой части этого равенства стоит положительная величина, поэтому

$$\arg F(w,\tau)F'_w(w,\tau)=0. \qquad (26)$$

Далее из (25) имеем

$$-\log 2FF'_w \leqslant \int_{u}^{u_1} \frac{du}{Y^2} \leqslant \frac{u_1-u}{Y^2} \leqslant \frac{\operatorname{Re} w + Y^2(\tau)}{Y^2(\tau)}.$$

Из (26), (27) описанным выше приемом легко убедиться в справедливости следующих соотношений для $f(z)\in H^2$:

$$\arg f'(z) = \arg z,^{1)}$$

$$0 \leqslant \log\left|\frac{f'(z)}{2z}\right| \leqslant 1 + \frac{\operatorname{Re} f(z)}{(\operatorname{Im} z)^2},$$

которые имеют место при $\operatorname{Re} z = 0$.

Сформулируем окончательно полученные результаты в виде следующей теоремы:

<u>Теорема</u>. Если $f(z)\in H^2, z\in \Pi^+$, то при $\operatorname{Re} z\neq 0$ имеют место оценки (19), (20), а при $\operatorname{Re} z=0$ – оценки (29). В каждой из этих оценок знаки равенства достигаются при $f(z)=z^2\in H^2$.

В заключение заметим, что из полученных оценок и равенства (28) следует, что для $f(z)\in H^2$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{2z} = 1, \quad z\in \Pi^+.$$

Литература

1. В.В. Соболев. Параметрические представления для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости. (Печатается в настоящем сборнике).

2. П.П. Куфарев, В.В. Соболев, Л.В. Спорышева. Об одном методе исследования экспериментальных задач для функций, однолистных в полуплоскости. Вопросы геометрической теории функций, вып. 5. Тр. Томского ун-та, 1968, 200, 164.

1/ Это равенство, впрочем, следует непосредственно из работы [1] при $\operatorname{Re} z=0$.