COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ

И. А. АЛЕКСАНДРОВ, С. Т. АЛЕКСАНДРОВ, В. В. СОБОЛЕВ

Институт Математики Тюменского Государственного Университета
ул. Семакова 10, Тюмень 3, СССР

0. $\mathscr{R}$-функции

Пусть $\Pi_z^+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость комплексной плоскости $\boldsymbol{C}_z$, $\boldsymbol{R} = \partial\Pi_z^+ = \{z\colon \operatorname{Im} z = 0\}$.

Определение. *Классом* $\mathscr{R}$ называется совокупность всех голоморфных в Π_z^+ функций $w = f(z)$, принимающих при всех $z \in \Pi_z^+$ значения $f(z) \in \overline{\Pi_w^+}$. (1)

Функции класса $\mathscr{R}$ играют исключительную роль в теории резольвент эрмитовых операторов, в интерполяционной проблеме аналитических функций и др.

Хорошо известно (см. например [1], с. 221–222, [2], с. 630, [3]) интегральное представление функций класса $\mathscr{R}$, даваемое следующей формулой:

$$f(z) = \alpha+\beta z+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\omega(t), \tag{1}$$

$z \in \Pi_z^+$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\beta \geqslant 0$, $\omega(t)$ — неубывающая на $\boldsymbol{R}$ функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t)}{1+t^2} < \infty.$$

Это интегральное представление с помошью дробно-линейного преобразования получается из найденного Ф. Рисом и Г. Херглоцем интегрального представления функций, голоморфных в единичном круге и принимающих в нем значения из правой полуплоскости.

Функция $\omega(t)$ в представлении (1) в существенном однозначно определяется функцией $f \in \mathscr{R}$. Например, при нормировке условиями

$$\omega(t) = \tfrac{1}{2}[\omega(t+0)+\omega(t-0)], \quad \omega(-\infty) = \lim_{t\to-\infty}\omega(t) = 0, \tag{2}$$

(1) При $z \in \Pi_z^+$ функция $f(z)$ класса $\mathscr{R}$ может принять вещественное значение в том и только том случае, когда она является вещественной константой (см. [2], с. 500).

функция $\omega(t)=\omega_f(t)$ в (1) однозначно определяется по функции $f\in\mathscr{R}$ с помощью известной формулы обращения Стильтьеса:

$$\omega_f(t)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t}\operatorname{Im} f(x+i\varepsilon)\,dx \tag{3}$$

при любом вещественном t. Функцию $\omega(t)=\omega_f(t)$, определяемую таким образом по $f\in\mathscr{R}$, называют спектральной функцией функции f.

Константы α и β в (1) также однозначно определяются по $f\in\mathscr{R}$; например, (см. [4], с. 54),

$$\beta=\beta_f=\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y}=\lim_{y\to\infty}\frac{f(iy)}{iy}. \tag{4}$$

Пусть $\Pi_z^+(\lambda)=\{z\colon \lambda<\arg z<\pi-\lambda\},\quad 0<\lambda<\pi/2.$

Нетрудно показать, пользуясь представлением (1), что наряду с (4) выполняется также равенство

$$\beta=\beta_f=\lim_{z\to\infty}(f(z)/z),\quad z\in\Pi_z^+(\lambda), \tag{5}$$

где λ — любое фиксированное число, $0<\lambda<\pi/2$. Величина β_f, определяемая равенствами (4) или (5), называется иногда угловой производной функции f в бесконечности.

Правая часть формулы (1) при указанных выше ограничениях на α, $\beta,\omega(t)$ определяет также голоморфную в нижней полуплоскости $\Pi_z^-=\{z\colon \operatorname{Im} z<0\}$ функцию $f^*(z)$, причем $\overline{f^*(\overline{z})}=f(z)$ при $z\in\Pi_z^+$. Совокупность двух аналитических функций f, f^*, определяемых в полуплоскостях Π_z^+, Π_z^- соответственно правой частью (1), называют $\mathscr{R}$-функцией, а f и f^* — верхней и соответственно нижней частями этой $\mathscr{R}$-функции.

Верхняя и нижняя части $\mathscr{R}$-функции не являются, вообще говоря, аналитическими продолжениями друг друга. В случае, если на некотором интервале $(a, b)\subset\boldsymbol{R}$ спектральная функция $\omega(t)$ постоянна, интеграл в (1) имеет смысл не только при $z\in\Pi_z^+$ или $z\in\Pi_z^-$, но и при $z\in(a,b)$ и принимает при таких $z\in(a,b)$ вещественные значения. В этом случае верхняя и нижняя части $\mathscr{R}$-функции являются аналитическими продолжениями одна другой через интервал (a,b). Обратно, если, например, верхняя часть f $\mathscr{R}$-функции продолжается хотя бы как непрерывная функция на интервал (a,b) вещественной оси и принимает на нем вещественные значения, то в силу формулы обращения (3) её спектральная функция $\omega_f(t)$ постоянна на (a,b) и, следовательно, нижняя и верхняя части $\mathscr{R}$-функции аналитически продолжаются друг в друга.

В дальнейшем будем рассматривать свойства верхних частей $\mathscr{R}$-функций (при $z\in\Pi_z^+$). Соответствующие свойства имеют место и для нижних частей этих функций.

1. Простейшие свойства класса $\mathscr{R}$ и его подклассов $\mathscr{R}_\beta$, $\mathscr{R}_\beta^0$, $\mathscr{R}_\beta^0(c)$, $\hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c)$

1. Предложение 1. *Для всякой функции $f\in\mathscr{R}$ при любых z', $z''\in\Pi_z^+$, $z'\neq z''$, выполняется неравенство*:

$$\left|\frac{f(z')-f(z'')}{z'-z''}\right|\leqslant\left|\frac{f(z')-\overline{f(z'')}}{z'-\overline{z}''}\right|. \tag{1.1}$$

Доказательство легко получается применением обобщенной леммы Шварца ([5], с. 319) к функции

$$\frac{f(z)-f(i)}{f(z)-\overline{f(i)}},\quad z=i\frac{1+\zeta}{1-\zeta},\quad |\zeta|<1.$$

Совершая в (1.1) предельный переход $z'\to z$, $z''\to z$, $z\in\Pi_z^+$ получаем

Предложение 2. *Для всякой функции $f\in\mathscr{R}$ при любом $z\in\Pi_z^+$ выполняется неравенство*

$$|f'(z)|\leqslant\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}. \tag{1.2}$$

Определение. Пусть $\beta,\beta\geqslant0$, — фиксированное число. *Классом $\mathscr{R}_\beta$* называется множество всех функций $f\in\mathscr{R}$, для которых угловая производная в бесконечности β_f (определяемая любым из равенств (4), (5)) равна β.

Предложение 3. *Для всякой функции $f\in\mathscr{R}_\beta$, $\beta\geqslant0$, при любом $z\in\Pi_z^+$ выполняется неравенство*

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}-\beta\geqslant0, \tag{1.3}$$

причем неравенство в (1.3) *возможно лишь только при* $f(z)-\beta z=\alpha=\mathrm{const}$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

В самом деле, из (1) при $\operatorname{Im} z\neq0$ имеем

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}-\beta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t)}{|t-z|^2}\geqslant0. \tag{1.4}$$

Равенство нулю здесь возможно лишь только при $\omega(t)=\mathrm{const}$, что ввиду (1) соответствует тождеству $f(z)-\beta z=\alpha$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

Усиление и обобщение оценки (1.2) на случай $f\in\mathscr{R}_\beta$, $\beta\geqslant0$, дает

Предложение 4. *Для всякой функции $f\in\mathscr{R}_\beta$, $\beta\geqslant0$, при любом $z\in\Pi_z^+$ имеют место оценки*

$$|f'(z)-\beta|\leqslant\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}-\beta, \tag{1.5}$$

$$f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!}{(\operatorname{Im} z)^{n-1}}\left[\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}-\beta\right]\quad(n=2,3,\ldots). \tag{1.6}$$

Для доказательства достаточно из (1) записать

$$\left|\frac{d^p}{dz^p}[f(z)-\beta z]\right| = \left|p!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t)}{(t-z)^{p+1}}\right| \leqslant \frac{p!}{(\operatorname{Im} z)^{p-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t)}{|t-z|^2} \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

и воспользоваться равенством из (1.4).

Определение. *Классом* $\mathscr{R}^0_\beta$, $\beta \geqslant 0$, называется подкласс класса $\mathscr{R}_\beta$, содержащий все функции f вида

$$f(z) = \beta z + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t)}{t-z}, \tag{1.7}$$

где $\omega(t)$ — неубывающая на $\boldsymbol{R}$ функция ограниченного изменения.

Предложение 5. *Для всякой функции* $f \in \mathscr{R}^0_\beta$, $\beta \geqslant 0$, *выполняется условие*

$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-\beta z] = 0, \quad z \in \Pi^+_z(\lambda), \tag{1.8}$$

при любом λ, $0 < \lambda < \pi/2$.

Доказательство вытекает из оценки

$$|f(z)-\beta z| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Im} z}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t) \leqslant \frac{1}{|z|\sin\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t), \quad z \in \Pi^+_z(\lambda),$$

получаемой из (1.7).

Аналогичным способом доказывается

Предложение 6. *Для всякой функции* $f \in \mathscr{R}^0_\beta$, $\beta \geqslant 0$, *выполняется условие*

$$\lim_{z\to\infty} f'(z) = \beta, \quad z \in \Pi^+_z(\lambda), \tag{1.9}$$

при любом λ, $0 < \lambda < \pi/2$. (²)

Имеет место

Теорема 1.1 ([1], с. 223). *Для принадлежности* f *классу* $\mathscr{R}^0_\beta$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f \in \mathscr{R}$ *и выполнялось условие*

$$\sup_{y>0} y|f(iy)-\beta iy| < \infty.$$

Хорошо известен также следующий результат.

Теорема 1.2 ([2], с. 641). *Для любой функции* $f \in \mathscr{R}^0_\beta$, $\beta \geqslant 0$, *следующие пять величин совпадают*:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t); \quad -\sup_{y>0} y|f(iy)-i\beta y|;$$

$$-\sup_{y>0} y[\operatorname{Im} f(iy)-\beta y]; \quad -\lim_{y\to\infty} y[\operatorname{Im} f(iy)-\beta y]; \quad i\lim_{y\to\infty} y[f(iy)-i\beta y].$$

(²) Это предложение оправдывает наименование „угловая производная" для величины $\beta = \beta_f$.

Предложение 7. *Пусть* $f \in \mathscr{R}^0_\beta$, $\beta \geqslant 0$, *и пусть* $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t) = c$. *Тогда выполняется равенство*

$$\lim_{z\to\infty} z[f(z)-\beta z + c/z] = 0, \quad z \in \Pi^+_z(\lambda), \tag{1.10}$$

при любом λ, $0 < \lambda < \pi/2$.

В самом деле, из (1.7) имеем

$$z[f(z)-\beta z+c/z] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t-z}d\omega(t).$$

Замечая, что при $z \in \Pi^+_z(\lambda)$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{t}{t-z}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\lambda}, \quad \left|\frac{z}{t-z}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\lambda},$$

можем написать, что при $A, B \in \boldsymbol{R}$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,d\omega(t)}{t-z}\right| \leqslant \int_{-A+0}^{B-0}\frac{|t|\,d\omega(t)}{|z|\sin\lambda} + \frac{1}{\sin\lambda}\int_{-\infty}^{-A+0} d\omega(t) + \frac{1}{\sin\lambda}\int_{B-0}^{\infty} d\omega(t),$$

откуда

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,d\omega(t)}{t-z}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{-A+0} d\omega(t) + \int_{B-0}^{\infty} d\omega(t)\right\} = \frac{1}{\sin\lambda}\left\{c - \int_{-A+0}^{B-0} d\omega(t)\right\},$$
$$z \in \Pi^+_z(\lambda), \quad 0 < \lambda < \pi/2.$$

Но правая часть стремится к нулю при $A, B \to \infty$, что и доказывает (1.10).

Замечание 1. Предложение 7 показывает, что для всякой функции $f \in \mathscr{R}^0_\beta$, $\beta \geqslant 0$, существует конечный вещественный (неположительный) предел

$$\lim_{z\to\infty} z[f(z)-\beta z] = \{f\}_1, \quad z \in \Pi^+_z(\lambda), \tag{1.11}$$

$0 < \lambda < \pi/2$, который равен

$$\{f\}_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f(t) \tag{1.12}$$

и который, следовательно, ввиду теоремы 1.2, совпадает с остальными четырьмя из пяти величин, фигурирующих в теореме 1.2.

Замечание 2. Можно показать,(³) что если для функции $f \in \mathscr{R}$ выполнено условие

$$\lim_{y\to\infty} y[f(iy)-i\beta y+c/iy] = 0$$

(³) См. [4], с. 54–57, где изучены более тонкие свойства асимптотических представлений функций $f \in \mathscr{R}$ при больших $|z|$, $z \in \Pi^+_z(\lambda)$, выраженные в условиях существования степенных моментов $\int_{-\infty}^{\infty} t^s d\omega_f(t)$ определенных порядков $s = 0, 1, \ldots$

с некоторыми постоянными числами $\beta \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $f \in \mathscr{R}_\beta^0$, причем величина $\{f\}_1$, определяемая любым из равенств (1.11) или (1.12), равна $-c$, а $\beta_f = \beta$.

Замечание 3. Справедливо также следующее утверждение: если для функции $f \in \mathscr{R}$ хотя бы одна из пяти величин в теореме 1.2 конечна (при $\beta \geqslant 0$), то конечны и все остальные, все пять величин совпадают и при этом $f \in \mathscr{R}_\beta^0$. Вообще, для любой функции $f \in \mathscr{R}_\beta$, $\beta \geqslant 0$, все пять величин в теореме 1.2 (которые могут быть и бесконечными) совпадают.

2. На классе $\mathscr{R}_\beta^0$, $\beta \geqslant 0$, значение функционала $\{f\}_1$, определяемого любым из равенств (1.11) или (1.12), заполняют весть промежуток $(-\infty, 0]$. При этом равенство $\{f\}_1 = 0$, $f \in \mathscr{R}_\beta^0$, возможно тогда и только тогда, когда $\omega_f(t) = \text{const}$, то есть только при $f(z) = \beta z$.

Зафиксируем произвольно число $c \geqslant 0$ и обозначим через $\mathscr{R}_\beta^0(c)$, $\beta \geqslant 0$, множество всех тех функций $f \in \mathscr{R}_\beta^0$, для которых $\{f\}_1 = -c$, и через $\hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c)$ — класс функций $f \in \mathscr{R}_\beta^0$, для которых выполнено условие — $\{f\}_1 \leqslant c$.

Отметим, что ввиду сказанного выше классы $\mathscr{R}_\beta^0(0)$, $\hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c)$ состоят из единственной функции $f(z) \equiv \beta z$ каждый.

Предложение 7 показывает, что каждая функция $f(z) \in \mathscr{R}_\beta^0(c)$, $c \geqslant 0$, допускает при $z \in \Pi_z^+$ представление

$$f(z) = \beta z - c/z + o(\Pi_z^+), \tag{1.13}$$

где $o(\Pi_z^+)$ — голоморфная в Π_z^+ функция такая, что

$$\lim_{z\to\infty} |z| o(\Pi_z^+) = 0, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda), \quad 0 < \lambda < \pi/2.$$

Предложение 8. *Для всякой функции $f \in \mathscr{R}_\beta^0(c)$ $(f \in \hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c))$, $c \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, при любом $z \in \Pi_z^+$ выполняются неравенства*

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} - \beta \leqslant \frac{c}{(\operatorname{Im} z)^2}, \tag{1.14}$$

$$|f'(z) - \beta| \leqslant \frac{c}{(\operatorname{Im} z)^2}, \tag{1.15}$$

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!\,c}{(\operatorname{Im} z)^{n+1}}. \tag{1.16}$$

Неравенства (1.14) очевидно вытекают с учетом (1.12) из (1.4), а неравенства (1.15) и (1.16) — из (1.5) и соответственно (1.6).

Теорема 1.3. *Для любого $c \geqslant 0$ класс $\hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c)$, $\beta \geqslant 0$, компактен в себе в топологии равномерной сходимости на множествах $\overline{\Pi_{z\delta}^+(\lambda)}$, где $\Pi_{z\delta}^+(\lambda) = \{z\colon \operatorname{Im} z > \delta,\ \lambda < \arg z < \pi - \lambda\}$, $\delta > 0$, $0 < \lambda < \pi/2$.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{f_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ функций $f_m \in \hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c)$. Обозначим через $\omega_m = \omega_m(t)$ спектральную функцию f_m, нормированную условиями (2). Тогда

$$f_m(z) = \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_m(t)}{t - z},$$

и полные вариации всех неубывающих на $\boldsymbol{R}$ функций $\omega_m(t)$ ограничены в совокупности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_m(t) \leqslant c \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

По второй теореме Хелли (см. [6], с. 290) из последовательности $\{\omega_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ можно выделить подпоследовательность $\{\omega_{m_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся в каждой точке интервала $\boldsymbol{R}$ к некоторой неубывающей функции $\omega_0(t)$. По первой теореме Хелли (см. [6], с. 288) функция $\omega_0(t)$ имеет ограниченную вариацию на $\boldsymbol{R}$, причем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{m_k}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_0(t) \leqslant c. \tag{1.17}$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_0(t)}{t - z}.$$

Эта функция ввиду (1.17) принадлежит классу $\hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c)$. Покажем, что при $k \to \infty$ последовательность $\{f_{m_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходится к $f_0(z)$ равномерно на любом множестве $\overline{\Pi_{z\delta}^+(\lambda)}$, $\delta > 0$, $0 < \lambda < \pi/2$.

По теореме Хелли при $k \to \infty$ в каждой точке $z \in \Pi_z^+$ выполняется $f_{m_k}(z) - f_0(z) \to 0$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как при $z \in \overline{\Pi_z^{+R}} = \{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant R\}$, $R > 0$, выполняется

$$|f_{m_k}(z) - f_0(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_{m_k}(t)}{|t - z|} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_0(t)}{|t - z|} \leqslant 2\frac{c}{R},$$

то, выбирая $R < 2\dfrac{c}{\varepsilon}$, $R > \delta$, получим

$$|f_{m_k}(z) - f_0(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{\Pi_z^{+R}}. \tag{1.18}$$

Последнее неравенство выполняется для любого номера $k = 1, 2, \ldots$

Последовательность $\{f_{m_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничена внутри Π_z^+, так как для любых γ, $0 < \gamma < \pi/2$, $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, $\delta_1 < \delta_2$, при $z \in \overline{\Pi_{z\delta_1}^{+\delta_2}(\gamma)}$, $\Pi_{z\delta_1}^{+\delta_2}(\gamma) = \{z\colon \delta_1 < \operatorname{Im} z < \delta_2,\ \gamma < \arg z < \pi - \gamma\}$, имеем

$$|f_{m_k}(z)| \leqslant \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_{m_k}(t)}{|t - z|} \leqslant \beta \frac{\delta_2}{\sin\gamma} + \frac{c}{\delta_1}.$$

Поэтому по теореме Витали (см. [5], с. 22–23) последовательность $\{f_{m_k}\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) сходится к $f_0(z)$ равномерно на $\overline{\Pi_{z\delta}^{+R}(\lambda)}$: для того же самого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $k > N(\varepsilon)$ будет выполнено

(1.19) $$|f_{m_k}(z)-f_0(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{\Pi_{z\delta}^{+R}(\lambda)}.$$

Из (1.18) и (1.19) вытекает, что при $k > N(\varepsilon)$ выполняется

$$|f_{m_k}(z)-f_0(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{\Pi_{z\delta}^{+}(\lambda)}.$$

Теорема доказана.

Определение. *Классом Q называется подкласс всех однолистных функций класса $\mathscr{R}$.*

Условимся обозначать $\mathscr{R}_\beta^0 \cap Q = Q_\beta$, $\mathscr{R}_\beta^0(c) \cap Q = Q_\beta(c)$, $\hat{\mathscr{R}}_\beta^0(c) \cap Q = \hat{Q}_\beta(c)$.

Из теоремы 1.3 очевидно вытекает

Следствие. *Для любого $c \geqslant 0$ класс $\hat{Q}_\beta(c)$, $\beta \geqslant 0$, компактен в себе в топологии равномерной сходимости на множествах $\overline{\Pi_{z\delta}^{+}(\lambda)}$, $\delta > 0$, $0 < \lambda < \pi/2$.*

2. Метод параметрического продолжения отображения полуплоскости в себя

1. По определению, Q_1 — класс всех однолистных голоморфных в верхней полуплоскости Π_z^+ функций $w = f(z)$ отображающих Π_z^+ в Π_w^+ и таких, что существует конечный предел

$$\lim_{z\to\infty} z[f(z)-z] = \{f\}_1, \quad z \in \Pi_z^+(\lambda),$$

при каждом λ, $0 < \lambda < \pi/2$.(4) Если $f \in Q_1$, то всегда $\{f\}_1 \leqslant 0$, причем $\{f\}_1 = 0$ только лишь при $f(z) \equiv z$. Класс $Q(c)$ ($\hat{Q}(c)$) при фиксированном $c \geqslant 0$ состоит из всех тех и только тех функций $f \in Q_1$, для которых $\{f\}_1 = -c$ ($-\{f\}_1 \leqslant c$).

При любом $c \geqslant 0$ класс $Q(c)$ не пуст: ему принадлежат функции

(2.1) $$f_a(z) = \sqrt{(z-a)^2-2c}+a, \quad a \in \boldsymbol{R},$$

при надлежащем выборе ветви радикала, причем $\{f_a\}_1 = -c$. Функция $w = f_a(z)$ конформно отображает Π_z^+ на область, получаемую из Π_w^+ проведением в ней прямолинейного, параллельно мнимой оси разреза длиной $\sqrt{2c}$, выходящего из точки $w = a$ вещественной оси.

Пример семейства функций (2.1) показывает, что множество значений $\{f\}_1$ на классе Q_1 функций f (так же как и на объемлющем Q_1 классе $\mathscr{R}_1^0$) заполняет весь промежуток $(-\infty, 0]$.

Функции класса Q_1 естественно возникают и играют важную роль при исследовании плоских потенциальных течений, упругих деформаций и других

(4) Здесь предел можно рассматривать при $z = iy$, $y \to \infty$.

плоских задач механики сплошной среды. Например, при рассмотрении стационарного потенциального плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости, обтекающего в верхней полуплоскости плоскости $\boldsymbol{C}_w$ со скоростью „невозмущенного'' потока в бесконечности, равной v, $v > 0$, препятствие (профиль), лежащее на дне потока (на вещественной оси плоскости $\boldsymbol{C}_w$), комплексный потенциал течения описывается голоморфной функцией $z = g(w)$, $g(\infty) = \infty$, однолистно отображающей односвязную область течения $B \subset \Pi_w^+$ на Π_z^+. Будем считать, что область B такова, что её дополнение до Π_w^+ ограничено. Покажем, что среди функций класса Q_1 найдется единственная функция $w = f(z)$, осуществляющая отображение на область B. В самом деле, по теореме Римана существует функция $w = \varphi(\zeta)$, $\varphi(\infty) = \infty$, конформно отображающая Π_ζ^+ на B. По принципу симметрии Римана–Шварца функцию $\varphi(\zeta)$ можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость Π_ζ^- с условием симметрии $\overline{\varphi(\bar{\zeta})} = \varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Pi_\zeta^+$. Продолженную функцию $\varphi(\zeta)$ имеет смысл рассматривать не только при $\zeta \in \Pi_\zeta^+$ или $\zeta \in \Pi_\zeta^-$, но и в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $\zeta = \infty$, где она будет однолистной. Ясно, что $\varphi(\zeta)$ разлогается в этой окрестности в ряд Лорана

$$\varphi(\zeta) = a_1\zeta+a_0+\frac{a_{-1}}{\zeta}+\frac{a_{-2}}{\zeta^2}+\ldots$$

с вещественными коэффициентами $a_1, a_0, a_{-1}, \ldots$ Верхняя полуплоскость допускает группу преобразований на себя вида $\zeta = az+b$, a и b — вещественные числа, $a \neq 0$, оставляющих неподвижной бесконечно удаленную точку. Рассматривая функцию

$$w = f(z) = \varphi(az+b) = a_1az+a_1b+a_0+\frac{a_{-1}}{az}+\ldots,$$

отображающую Π_z^+ на область B, $f(\infty) = \infty$, убеждаемся, что подходящим выбором чисел a и b можно получить для $f(z)$ разложение

(2.2) $$f(z) = z+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots,$$

где $c_1, c_2, \ldots$ — вещественные. При этом $\{f\}_1 = c_1$ и, следовательно, $f \in Q(-c_1) \subset Q_1$. Единственность функции f в Q_1 легко доказывается от противного. Функция $z = vf^{-1}(w)$ будет искомым комплексным потенциалом течения.

2. Введем в рассмотрение подкласс H_r класса Q_1, содержащий те и только те функции $f \in Q_1$, которые в окрестности точки $z = \infty$ допускают разложение в ряд Лорана вида (2.2) с вещественными коэффициентами $c_1, c_2, \ldots$

Выше было показано, что если односвязная область $B \subset \Pi_w^+$ имеет ограниченное дополнение до Π_w^+, то в H_r существует единственная функция f такая, что $f(\Pi_z^+) = B$. Очевидно и обратное: при $f \in H_r$ область $f(\Pi_z^+) \subset \Pi_w^+$ имеет ограниченное дополнение до Π_w^+.

Совокупность всех функций $f \in H_r$, для которых $\Pi_w^+ \setminus f(\Pi_z^+)$, состоит из конечного числа жордановых кривых, будем обозначать через $\tilde{H}$.

Можно показать, (см. [7], с. 243), что подкласс $\tilde{H}$ всюду плотен в классе H_r как в топологии равномерной сходимости функций внутри Π_z^+, так и в топологии равномерной сходимости в окрестности точки $z = \infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Теорема 2.1 ([8], см. также [7], с. 234). *Пусть $f \in \tilde{H}$, $f(z) \not\equiv z$. Тогда существуют число $\tau_0 > 0$ и вещественная кусочно-непрерывная на отрезке $[0, \tau_0]$ функция $u = u(\tau)$ такие, что $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \zeta(z, \tau_0)$, где под $\zeta = \zeta(z, \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, понимается решение дифференциального уравнения*

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{1}{u-\zeta}, \tag{2.3}$$

удовлетворяющее начальному условию $\zeta|_{\tau=0} = z$, $z \in \Pi_z^+$. При этом $\tau_0 = -\{f\}_1$.

Дифференциальное уравнение (2.3) служит аналогом известного в теории функций уравнения Лёвнера для функций, голоморфных и однолистных в круге $E = \{\zeta: |\zeta| < 1\}$, и может быть получено из уравнения Лёвнера с помощью дробно-линейного преобразования полуплоскости Π_z^+ на круг E. (5)

Укажем попутно ещё один результат, аналогичный теореме 2.1, устанавливающий вид уравнения типа Лёвнера для одного подкласса класса $\tilde{H}$.

Назовем *классом* $\mathcal{R}^*$ совокупность всех функций $w = f(z)$ класса $\mathcal{R}$, удовлетворяющих условию $-\overline{f(-\bar{z})} = f(z)$, $z \in \Pi_z^+$ и, следовательно, отображающих Π_z^+ на области $f(\Pi_z^+)$ в Π_w^+, симметричные относительно мнимой оси плоскости C_w. Обозначим $\tilde{H} \cap \mathcal{R}^* = \tilde{H}^*$.

Теорема 2.2 ([9]). *Пусть $f \in \tilde{H}^*$, $f(z) \not\equiv z$. Тогда существуют число $\tau_0 > 0$ и вещественная кусочно непрерывная на отрезке $[0, \tau_0]$ функция $u = u(\tau)$ такие, что $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \zeta(z, \tau_0)$, где под $\zeta = \zeta(z, \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, понимается решение дифференциального уравнения*

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{\zeta}{u^2-\zeta^2}, \tag{2.4}$$

удовлетворяющее начальному условию $\zeta|_{\tau=0} = z$, $z \in \Pi_z^+$. При этом $\tau_0 = \{f\}_1$.

Как обратная к теореме 2.1 имеет место

Теорема 2.3 ([7], с. 234). *Пусть $\tau_0 > 0$ — произвольно-фиксированное число и $u = u(\tau)$ — вещественная кусочно-непрерывная функция на отрезке $[0, \tau_0]$ без точек разрыва второго рода. Тогда решение уравнения (2.3) с начальным условием $\zeta|_{\tau=0} = z$, $z \in \Pi_z^+$, представляет функцию $\zeta = \zeta(z, \tau)$, которая при каждом фиксированном τ, $0 < \tau < \tau_0$, как функция параметра z, $z \in \Pi_z^+$, принадлежит классу H_r. При этом $\{\zeta\}_1 = -\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$.*

(5) В [8] дан непосредственный вывод уравнения (2.3) без использования уравнения Лёвнера.

Отметим, что для подкласса $H_r^* = H_r \cap \mathcal{R}^*$ имеет место утверждение, вполне аналогичное теореме 2.3: *решение $\zeta = \zeta(z, \tau)$, $\zeta(z, 0) = z$, $z \in \Pi_z^+$, уравнения* (2.4) *с такой же, как в теореме* 2.3, *функцией $u = u(\tau)$ принадлежит при любом $\tau \in (0, \tau_0]$ классу H_r^*.*

Нетрудно проверить справедливость следующего результата.

Лемма 2.1. *Для любой функции $f(z) \in Q_1$ существует последовательность $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функций f_n класса $\tilde{H}$, сходящаяся к $f(z)$ равномерно на всяком множестве $\overline{\Pi_{z\delta}^+(\lambda)}$, $\delta > 0$, $0 < \lambda < \pi/2$, таких, что $\lim_{n\to\infty} \{f_n\}_1 = \{f\}_1$ и при этом выполнено*

$$\{f_n\}_1 \leqslant \{f\}_1 (6) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

Приведем еще один нужный для дальнейшего хорошо известный результат о предельном переходе под знаком интеграла Стильтьеса.

Лемма 2.2. *Пусть $\sigma(t)$ — неубывающая на некотором интервале $I \subset \boldsymbol{R}$ функция, $F(t, y)$, $t \in I$, $y \geqslant 1$, — непрерывная по t функция, которая при $y \to \infty$ стремится к $F_0(t)$ равномерно на любой конечной части $\boldsymbol{R}$. Пусть, кроме того, существует непрерывная по t функция $\Phi(t)$ такая, что $|F(t, y)| \leqslant \Phi(t)$ при любых $t \in I$ и $y \geqslant 1$ и*

$$\int_I \Phi(t)\, d\sigma(t) < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{y\to\infty} \int_I F(t, y)\, d\sigma(t) = \int_I F_0(t)\, d\sigma(t).$$

3. На вещественной плоскости (τ, t) рассмотрим множество $U_\gamma = \{(\tau, t): 0 < \tau < \gamma, -\infty < t < \infty\}$, $\gamma < \infty$.

Пусть $\mathfrak{M}_\gamma$ — класс всех вещественнозначных неубывающих на $\overline{U}_\gamma$ функций $\mu(\tau, t)$, нормированных условиями

$$\mu(0, t) = \mu(\tau, -\infty) = 0, \quad \mu(\tau, \infty) = \tau. \tag{2.6}$$

Условие неубывания функции $\mu(\tau, t)$ понимается в следующем смысле: для любых четырех точек $(\tau_1, t_1), (\tau_1, t_2), (\tau_2, t_1), (\tau_2, t_2)$, из $\overline{U}_\gamma$ таких, что $\tau_1 < \tau_2$, $t_1 < t_2$, выполняется неравенство

$$\mu(\tau_1, t_2) + \mu(\tau_2, t_1) \leqslant \mu(\tau_1, t_1) + \mu(\tau_2, t_2).$$

Непосредственно из определения вытекает абсолютная непрерывность по τ, $0 < \tau < \gamma$, функции $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}_\gamma$ при каждом фиксированном t, $-\infty \leqslant$

(6) Можно показать, что всякую функцию $f(z) \in Q_1$ можно, как и в лемме 2.1, аппроксимировать функциями $f_n \in \tilde{H}$, для которых вместо (2.5) выполняется обратное неравенство $\{f_n\}_1 \geqslant \{f\}_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

$\leqslant t \leqslant \infty$. В самом деле, для любых четверок точек $(\tau_n, t_n) \in \overline{U}_\gamma$ $(n, m = 1, 2)$ таких, что $\tau_1 < \tau_2$, $t_1 < t_2$, имеем по условию неубывания $\mu(\tau, t)$ на $\overline{U}_\gamma$ следующее неравенство:

$$\mu(\tau_2, t_1) - \mu(\tau_1, t_1) \leqslant \mu(\tau_2, t_2) - \mu(\tau_1, t_2). \tag{2.7}$$

Полагая сначала $t_1 = -\infty$, $t_2 = t$, $t \in \boldsymbol{R}$, а затем $t_1 = t$, $t_2 = \infty$, и учитывая нормировку (2.6), находим, что

$$0 \leqslant \mu(\tau_2, t) - \mu(\tau_1, t) \leqslant \tau_2 - \tau_1$$

для любого t, $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, откуда вытекает наше утверждение.

Рассмотрим объединение $\bigcup \mathfrak{M}_\gamma$ по всем γ, $0 < \gamma < \infty$, и обозначим его через $\mathfrak{M}$.

Из (2.7) и абсолютной непрерывности по τ функции $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}$ следует существование для почти всех τ, на некотором конечном промежутке $0 < \tau < \gamma$, $\gamma < \infty$, суммируемой производной $\mu'_\tau(\tau, t)$.

Рассмотрим функцию

$$\nu(\tau, t) = \lim_{\Delta\tau \to \Delta} \frac{\mu(\tau, t) - \mu(\tau - \Delta\tau, t)}{\Delta\tau}, \quad \Delta\tau > 0.$$

Функция $\nu(\tau, t)$ определена при всех τ, $0 < \tau < \gamma$, $t \in \boldsymbol{R}$, и при фиксированном t, почти при всех τ, $0 < \tau < \gamma$, $\nu(\tau, t) = \mu'_\tau(\tau, t)$. Учитывая условие неубывания $\mu(\tau, t)$, имеем при $\tau_1 < \tau_2$, $t_1 < t_2$

$$\lim_{\tau_1 \to \tau_2} \frac{\mu(\tau_2, t_1) - \mu(\tau_1, t_1)}{\tau_2 - \tau_1} \leqslant \lim_{\tau_1 \to \tau_2} \frac{\mu(\tau_2, t_2) - \mu(\tau_1, t_2)}{\tau_2 - \tau_1}$$

следовательно, при фиксированном τ, $0 < \tau < \gamma$, $\nu(\tau, t)$ является неубывающей функцией по t. В силу (2.6) функция $\nu(\tau, t)$ нормирована условиями $\nu(\tau, -\infty) = 0$, $\nu(\tau, +\infty) = 1$. Впредь, говоря о производной $\mu'_\tau(\tau, t)$ функции $\mu(\tau, t)$ будем считать, что символ $\mu'_\tau(\tau, t)$ определен для всех τ, $0 < \tau < \gamma$, $t \in \boldsymbol{R}$, по формуле $\mu'_\tau(\tau, t) = \nu(\tau, t)$.

Будем обозначать через $\mathfrak{N}$ класс всех таких однопараметрических семейств функций $\nu_\tau(t)$, измеримых по параметру τ на некотором конечном промежутке $(0, \gamma)$ (своем для каждой функции $\nu_\tau(t)$), то есть будем считать измеримое по τ, $0 < \tau < \gamma$, семейство $\nu_\tau(t)$ принадлежащим классу $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда существует число γ, $0 < \gamma < \infty$, такое что при почти всех фиксированных τ, $0 < \tau < \gamma$, функция $\nu_\tau(t)$ неубывает и имеет на $\boldsymbol{R}$ полную вариацию, равную единице.

Нетрудно видеть, что формула

$$\mu(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_\zeta(t)\, d\zeta$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие (с точностью до эквивалентности) между функциями классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Определение. Пусть $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность функций класса $\mathfrak{M}$. Каждая $\mu_n = \mu_n(\tau, t)$ определена на некотором множестве $\overline{U}_{\gamma_n}$, $0 < \gamma_n < \infty$. Пусть при τ из некоторого промежутка T, принадлежащего всем промежуткам $T_n = (0, \gamma_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, кроме, может быть, конечного их числа, определена функция $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}$. Будем говорить, что последовательность $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *сходится к* μ, если во всех точках непрерывности функции $\mu(\tau, t)$ выполнено условие

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(\tau, t) = \mu(\tau, t).$$

Для последовательностей $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функций класса $\mathfrak{M}$ имеет место теорема, аналогичная принципу выбора Хелли.

Теорема 2.4. *Пусть $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность функций $\mu_n = \mu_n(\tau, t)$ класса $\mathfrak{M}$, $\mu_n(\tau, t)$ определена при $\tau \in T_n = (0, \gamma_n)$, $\gamma_n < \infty$, и пусть при всех номерах $n = 1, 2, \ldots$, кроме, быть может, конечного числа номеров, выполнено неравенство $\gamma_n \geqslant \gamma$, $\gamma > 0$. Тогда существует подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся к некоторой функции $\mu_0 \in \mathfrak{M}_\gamma$.*

Теорема 2.5. *Если последовательность $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функций класса $\mathfrak{M}$ сходится к функции $\mu_0 \in \mathfrak{M}_\gamma$, то для любой непрерывной финитной функции $F(\tau, t)$ в U_γ*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{U_\gamma} F\, d\mu_n = \int_{U_\gamma} F\, d\mu_0.$$

Будем использовать в дальнейшем теорему 2.5, в несколько видоизмененной форме.

Пусть комплекснозначная функция $F(z, \tau, t)$, непрерывная в $\Pi_z^+ \times U_\gamma$, удовлетворяет условию $|F(z, \tau, t)| \leqslant K(\varepsilon)$, $K(\varepsilon) > 0$, равномерно по отношению к (z, t) на $\overline{\Pi_{z\delta}^+} \times \overline{\boldsymbol{R}}$, $\Pi_{z\delta}^+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > \delta\}$, $\delta > 0$. Легко видеть, что для всякой функции $\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}_\gamma$ интеграл

$$\int_{U_\gamma} F\, d\mu = \int_0^\gamma d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(z, \tau, t)\, \mu'_\tau(\tau, dt)$$

сходится равномерно по параметру z, $z \in \overline{\Pi_{z\delta}^+}$.

Пусть $U_\tau = \{(\theta, t)\colon 0 < \theta < \tau, -\infty < t < \infty\}$, $\tau \leqslant \gamma$, $\gamma < \infty$, переменная область и

$$\Phi(\tau, F, \mu) = \int_{U_\tau} F\, d\mu.$$

Теорема 2.5$'$. *При сохранении условий о последовательности $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, указанных в теореме 2.5, имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(\tau, F, \mu) = \Phi(\tau, F, \mu_0)$$

равномерно по z и τ, соответственно, при $z \in \overline{\Pi_{z\delta}^+}$, $\delta > 0$, и на сегменте $[0, \gamma]$.

Действительно, достаточно заметить, что равномерная по τ сходимость следует из равностепенной непрерывности семейства функций $\{\Phi(\tau, F, \mu)\}$, $\mu \in \mathfrak{M}_\gamma$, на сегменте $[0, \gamma]$ и сходимости в каждой точке τ, $0 \leqslant \tau \leqslant \gamma$.

4. Пусть $R_0 = \mathscr{R}_0^0(1)$, то есть R_0 класс всех функций $h(z)$ вида

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{t-z}, \tag{2.8}$$

где $\omega(t)$ — неубывающая на $\boldsymbol{R}$ функция, полная вариация которой на $\boldsymbol{R}$ равна единице.

Будем обозначать через $R(R_0, T)$, $T = [0, \tau_0]$, $\tau_0 < \infty$, множество всех функций $h(\zeta, \tau)$, измеримых по τ, $\tau \in T$, при фиксированном $\zeta \in \Pi_\zeta^+$ и принадлежащих классу R_0 для почти всех τ из T.

В силу интегрального представления (2.8) каждую функцию $h(\zeta, \tau)$ класса $R(R_0, T)$ можно представить в интегральной форме:

$$h(\zeta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \mu_\tau'(\tau, dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \nu(\tau, dt), \tag{2.9}$$

где $\nu_\tau(t) = \nu(\tau, t) = \mu_\tau'(\tau, t)$ — некоторое семейство из $\mathfrak{N}$, $\nu_\tau(-\infty) = 0$, $\nu_\tau(\infty) = 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$.

В частности, если $\tilde{\nu}_\tau(t) \in \mathfrak{N}$ определено при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ следующим образом:

$$\tilde{\nu}_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < u(\tau), \\ 1, & t \geqslant u(\tau), \end{cases}$$

где $u(\tau)$ — произвольная вещественная непрерывная или кусочно непрерывная на сегменте $[0, \tau_0]$ функция, то

$$h(\zeta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \tilde{\nu}(\tau, dt) = \frac{1}{u(\tau)-\zeta}.$$

Совокупность всех таких семейств $\tilde{\nu}_\tau(t)$ класса $\mathfrak{N}$ будем обозначать через $\tilde{\mathfrak{N}}$, а соответствующий подкласс класса $\mathfrak{M}$ через $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Нетрудно убедиться, что любую функцию $\nu_\tau(t)$ класса $\mathfrak{N}$, $\tau \in T$, формула (2.9) преобразует в функцию класса $R(R_0, T)$. Таким образом, формула (2.9) дает интегральное параметрическое представление класса $R(R_0, T)$. В ней в качестве параметров выступают семейства $\nu_\tau(t) \in \mathfrak{N}$ ($\mu(\tau, t) \in \mathfrak{M}$). Отметим, что $\nu_\tau(t)$ служит спектральной функцией функции $h(\zeta, \tau)$ при почти всех фиксированных $\tau \in T$ и, следовательно, $\nu_\tau(t)$ в существенном однозначно определяется по функции $h(\zeta, \tau)$. В частности, для функции $h(\zeta, \tau) \in R(R_0, T)$ тождество $h(\zeta, \tau) \equiv 0$, $\zeta \in \Pi_\zeta^+$, $\tau \in T$, возможно тогда и только тогда, когда её спектральная функция $\nu_\tau(t)$ тождественно постоянна на $\boldsymbol{R}$.

5. Пусть $\nu = \nu_\tau(t)$ — произвольное семейство класса $\mathfrak{N}$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta} \nu(\tau, dt), \tag{2.10}$$

определенное для почти всех τ из некоторого промежутка $T = [0, \tau_0]$, $\tau_0 < \infty$, и обозначим через $\zeta = f(z, \tau; \nu)$ его решение в смысле Каратеодори (то есть такую функцию, при которой (2.10) выполнено для почти всех $\tau \in T$, исключая, быть может, множество меры нуль), удовлетворяющее начальному условию

$$\zeta|_{\tau=0} = z, \quad z \in \Pi_z^+. \tag{2.11}$$

Следующий результат, принадлежащий С. Т. Александрову [10], обобщает теоремы 2.1 и 2.3, устанавливая интегродифференциальное параметрическое представление класса Q_1. При этом в роли параметров выступают функции класса $\mathfrak{N}$ (или $\mathfrak{M}$). Отметим, что этот результат аналогичен результату В. Я. Гутлянского [11], дающего критерий принадлежности функции классу S (однолистных голоморфных нормированных функций в единичном круге) в терминах параметра из известного класса C Каратеодори. При доказательстве теоремы С. Т. Александрова мы придерживаемся в основном схемы доказательства соответствующей теоремы В. Я. Гутлянского, описанный в книге [7].

Теорема 2.6. *Для того, чтобы функция f принадлежала классу Q_1, необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде*

$$f(z) = f(z, \tau_0; \nu), \quad \tau_0 \geqslant 0, \ \nu \in \mathfrak{N}.$$

Доказательство. (а) Случай, когда $\tau_0 = 0$, очевидно приводит к функции $f(z) = f(z, 0; \nu) = z$ класса Q_1. Пусть теперь $\tau_0 > 0$ и $\nu \in \mathfrak{N}$. Тогда функция $h(\zeta, \tau)$, определяемая формулой (2.9), принадлежит классу $R(R_0, T)$, $T = [0, \tau_0]$. По теореме Каратеодори (см. [12], с. 54) на некотором интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \tau < \gamma$, $\gamma > 0$, существует решение $\zeta(\tau, \theta, z)$, $\zeta(\theta, \theta, z) = z$, $z \in \Pi_z^+$, уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = h(\zeta, \tau), \tag{2.12}$$

поскольку

$$|h(\zeta, \tau)| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}, \quad \zeta \in \Pi_\zeta^+. \tag{2.13}$$

При изменении τ от θ до γ, $\gamma > \theta$, значения принимаемые $\zeta(\tau, \theta, z)$, остаются внутри полуплоскости Π_ζ^+, что следует из неравенства

$$\frac{d\operatorname{Im}\zeta}{d\tau} = \operatorname{Im} h(\zeta, \tau) > 0, \tag{2.14}$$

выполняющегося для любой функции $h(\zeta, \tau) \in R(R_0, T)$, $h(\zeta, \tau) \not\equiv 0$. Это обстоятельство позволяет продолжить решение $\zeta(\tau, \theta, z)$ на весь промежуток $T = [0, \tau_0]$. Из принадлежности функции $h(\zeta, \tau)$ классу R_0 для почти всех $\tau \in T$ следует голоморфность $\zeta(\tau, \theta, z)$ относительно z в Π_z^+. Правая часть уравнения (2.12) удовлетворяет согласно (2.9) в $\Pi_{z\delta}^+$, $\delta > 0$, условию Липшица

$$|h(\zeta', \tau) - h(\zeta'', \tau)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta' - \zeta''|}{|t-\zeta'||t-\zeta''|} \nu(\tau, dt) \leqslant \frac{1}{\delta^2} |\zeta' - \zeta''|$$

равномерно по τ в T. Поэтому, в силу теоремы единственности Каратеодори (см. [13], с. 123), через каждую точку $(\theta, z) \in T \times \Pi_z^+$ проходит единственное решение $\zeta = \zeta(\tau, \theta, z)$ уравнения (2.12) и, следовательно, функция $\zeta(\tau, \theta, z)$ однолистна в полуплоскости Π_z^+ при фиксированных τ и t, $\tau \geqslant 0$.

Рассмотрим функцию $\zeta(\tau, 0, z)$. Она является решением уравнения (2.10), удовлетворяющим условию (2.11). Следовательно, $f(z, \tau; \nu) = \zeta(\tau, 0, z)$. Покажем, что функция $f(z) = f(z, \tau; \nu)$ принадлежит классу Q_1. Для этого достаточно показать, что $\zeta(\tau, \theta, z) \in \mathscr{R}_1^0$ при произвольно фиксированных τ и θ, $0 < \tau \leqslant \theta$. С этой целью, используя уравнение (2.12) и начальное условие $\zeta(\theta, \theta, z) = z$, запишем равенство

$$\zeta(\tau, \theta, z) = z + \int_{\theta}^{\tau} h(\zeta(\tau, \theta, z), \tau) d\tau. \tag{2.15}$$

Из (2.14) следует, что функция $b(\tau, \theta, z) = \operatorname{Im} \zeta(\tau, \theta, z)$ при фиксированных θ и z, $z \in \Pi_z^+$, монотонно возрастает по τ при $\tau \geqslant \theta$. Значит, при $y > 0$ выполнено неравенство

$$y \leqslant b(\tau, \theta, x+iy), \quad x \in \boldsymbol{R}, \tau \geqslant \theta. \tag{2.16}$$

С учетом этого неравенства и неравенства (2.13) из (2.15) при любом $y > 0$ имеем

$$y|b(\tau, \theta, iy) - y| \leqslant y \int_{\theta}^{\tau} \left| h(\zeta(\tau, \theta, iy), \tau) \right| d\tau \leqslant y \int_{\theta}^{\tau} \frac{d\tau}{b(\tau, \theta, iy)} \leqslant \tau - \theta, \quad \tau \in T.$$

Отсюда по теореме 1.2 и замечанию 3, I° § I, заключаем, что

$$\zeta(\tau, \theta, z) \in \mathscr{R}_1^0.$$

Таким образом, достаточность условия доказана. Сделаем в дополнение к доказанному одно уточнение.

Подсчет величины

$$\{\zeta(\tau, \theta, z)\}_1 = \lim_{z\to\infty} z[\zeta(\tau, \theta, z) - z], \quad z \in \Pi_{z_\lambda}^+(\lambda), \quad 0 < \lambda < \pi/2,$$

с использованием (2.15), (2.9), (1.8) (при $\beta = 1$) и с помощью леммы 2.2 дает

$$\{\zeta(\tau, \theta, z)\}_1 = -\tau + \theta.$$

Поэтому $\{f\}_1 = -\tau_0$. Итак, $f \in Q(\tau_0)$.

(б) Пусть $f \in Q_1$, $f(z) \not\equiv z$. Тогда $\{f\}_1 < 0$. Обозначим $-\{f\}_1 = \tau_0$. По лемме 2.1 существует последовательность $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функций $f_n(z)$ класса $\tilde{H}$, сходящаяся к $f(z)$ равномерно на множествах $\overline{\Pi_{i\delta}^+(\lambda)}$, $\delta > 0$, $0 < \lambda < \pi/2$, и таких, что $\{f_n\}_1 \to \{f\}_1$ при $n \to \infty$, $\{f_n\}_1 \leqslant \{f\}_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По теореме 2.1 каждую функцию $f_n(z) \in \tilde{H}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ представим в виде

$$f_n(z) = f(z, \tau_n; \nu_n),$$

где $\nu_n = \nu_n(\tau, t)$ определена на промежутке $T_n = [0, \tau_n]$, $\tau_n = -\{f_n\}_1$, следующим образом:

$$\nu_n(\tau, t) = \begin{cases} 0, & t < u_n(\tau), \\ 1, & t \geqslant u_n(\tau), \end{cases}$$

$u_n(\tau)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — вещественная функция, кусочно непрерывная на промежутке T_n. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau_0, \quad \tau_n \geqslant \tau_0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Введем в рассмотрение функции

$$\mu_n(\tau, t) = \int_0^{\tau} \nu_n(\zeta, \tau) d\zeta \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

класса $\mathfrak{M}$. Все они определены на промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. По теореме 2.4 существует подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и функция $\mu_0(\tau, t) \in \mathfrak{M}$ такие, что во всех точках непрерывности функции $\mu_0(\tau, t)$ выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\tau, t) = \mu_0(\tau, t), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0.$$

Пусть

$$f_0(z) = f(z, \tau_0; \nu_0),$$

где

$$\nu_0 = \nu_0(\tau, t) = \mu'_{0\tau}(\tau, t).$$

Докажем, что $f_0(z) \equiv f(z)$. Для этого сначала установим равномерную сходимость при $k \to \infty$ последовательности функций $\zeta_{n_k} = f(z, \tau; \nu_{n_k})$ к функции $\zeta_0 = f(z, \tau; \nu_0)$ по τ и z, соответственно, в промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и в полуплоскости $\overline{\Pi_{z\delta}^+}$, $\delta > 0$ — любое. В силу (2.10) имеем

$$|\zeta_{n_k} - \zeta_0| \leqslant \int_0^{\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{t-\zeta_{n_k}} - \frac{1}{t-\zeta_0} \right| \nu_{n_k}(\tau, dt) + |S_k(z, \tau)|, \tag{2.17}$$

где

$$S_k(z, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\zeta_0} [\nu_{n_k}(\tau, dt) - \nu_0(\tau, dt)].$$

По теореме 2.5′ последовательность $\{S_k(z,\tau)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ равномерно относительно z и τ при $z \in \overline{\Pi^+_{z\delta}}$, $\delta > 0$, и $\tau \in [0, \tau_0]$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Из (2.17) при $z \in \overline{\Pi^+_{z\delta}}$, $\delta > 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|\zeta_{n_k} - \zeta_0| \leqslant B\int\limits_0^\tau |\zeta_{n_k} - \zeta_0|\,d\tau + \varepsilon,$$

где $B = 1/\delta^2$, при всех достаточно больших номерах k. Отсюда следует оценка

$$|\zeta_{n_k} - \zeta_0| \leqslant \varepsilon e^{\tau_0 B}, \quad z \in \overline{\Pi^+_{z\delta}}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0. \tag{2.18}$$

В самом деле, пусть $|\zeta_{n_k} - \zeta_0| = e^{\tau B}\varphi(z,\tau)$ и пусть

$$\varphi(z,\tau^*) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0} \varphi(z,\tau), \quad z \in \overline{\Pi^+_{z\delta}}.$$

Тогда

$$e^{\tau B}\varphi(z,\tau) \leqslant B\int\limits_0^\tau e^{\tau B}\varphi(z,\tau)\,d\tau + \varepsilon \leqslant \varphi(z,\tau^*)(e^{\tau B} - 1) + \varepsilon,$$

откуда при $\tau = \tau^*$ получаем оценку

$$e^{\tau^* B}\varphi(z,\tau^*) \leqslant \varphi(z,\tau^*)(e^{\tau_0 B} - 1) + \varepsilon,$$

приводящую к (2.18). Из (2.18) вытекает утверждение о равномерной сходимости $f(z,\tau;\nu_{n_k})$ к $f(z,\tau;\nu_0)$ при $k \to \infty$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить равномерную сходимость внутри Π^+_z последовательности $\{f_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ к функции $f_0(z)$. Отсюда уже следует тождество $f_0(z) \equiv f(z)$.

Представим разность $f_{n_k}(z) - f_0(z)$ в виде

$$f_{n_k}(z) - f_0(z) = f(z,\tau_0;\nu_{n_k}) - f(z,\tau_0;\nu_0) + \sigma_k(z),$$

где

$$\sigma_k(z) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_{n_k}} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_{n_k}(\tau,dt)}{t - \zeta_{n_k}}.$$

Так как при $z \in \overline{\Pi^+_{z\delta}}$ имеем

$$|\sigma_k(z)| \leqslant \int\limits_{\tau_0}^{\tau_{n_k}} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_{n_k}(\tau,dt)}{\operatorname{Im}\zeta_{n_k}} \leqslant \frac{1}{\delta}(\tau_{n_k} - \tau_0)$$

в виду (2.18) разность $f(z,\tau_0;\nu_{n_k}) - f(z,\tau_0;\nu_0)$ стремится к нулю равномерно относительно $z \in \overline{\Pi^+_{z\delta}}$ при $k \to \infty$, то, поскольку $\tau_{n_k} - \tau_0 \to 0$ при $k \to \infty$, нужное доказано.

Теорема доказана полностью.

6. Приведем одну аналогичную теореме 2.6 теорему, дающую критерий принадлежности функции подклассу $Q_1^* = Q_1 \cap \mathscr{R}^*$ функций f класса Q_1, обладающих свойством симметрии $\overline{f(-\bar z)} = -f(z)$, $z \in \Pi^+_z$.

Пусть $\nu = \nu(\tau,t) \in \mathfrak{N}$ и $\zeta(z,\tau;\nu)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \zeta\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau,dt)}{t^2 - \zeta^2}, \tag{2.19}$$

удовлетворяющее начальному условию $\zeta|_{\tau=0} = z$, $z \in \Pi^+_z$.

Теорема 2.7. *Функция $f(z)$ принадлежит классу Q_1^* тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде*

$$f(z) = f(z,\tau_0;\nu), \quad \tau \geqslant 0,\ \nu \in \mathfrak{N}, \tag{2.20}$$

где $f(z,\tau;\nu)$ — решение уравнения (2.19), $f(z,0;\nu) = z$, $z \in \Pi^+_z$.

Для доказательства достаточно заметить, что функция

$$h(\zeta,\tau) = \zeta\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau,dt)}{t^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau,dt)}{t - \zeta} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau,dt)}{-t - \zeta}$$

принадлежит классу R_0 при фиксированном τ и, следовательно, функция $f(z)$, получаемая по формуле (2.20), принадлежит классу Q_1. Кроме того, как легко убедиться, она удовлетворяет условию $\overline{f(-\bar z)} = -f(z)$ при любом $z \in \Pi^+_z$. Значит, $f \in Q_1^*$.

Возможность получения по формуле (2.20) любой функции класса Q_1^* вытекает из того, что подкласс $\tilde{\mathfrak{N}}$ класса $\mathfrak{N}$ посредством формулы (2.20) генерирует плотный в Q_1^* подкласс $\tilde H^* = \tilde H \cap \mathscr{R}^*$. Остается воспользоваться теоремой 2.2 и, так же как и в теореме 2.6, компактностью класса $\mathfrak{M}$.

3. Вариационные задачи на классе Q_1

Уравнение (2.12) или, что то же самое, (2.10) играет для функций, однолистных в полуплоскости Π^+_z, роль аналогичную роли уравнения Лёвнера–Куфарева для однолистных функций в единичном круге. Хорошо известны (см. [7]) многочисленные приложения уравнения Лёвнера–Куфарева к решению различных задач теории однолистных функций.

В этом параграфе, основываясь на полученном уравнении (2.12), которое будем называть уравнением типа Лёвнера–Куфарева для полуплоскости, мы дадим решение нескольких экстремальных задач на классе Q_1 ($Q(c)$, $c > 0$), укажем способ получения вариационных формул на классах Q_1 и $Q(c)$. Отметим, что возможны и другие применения этого уравнения.

1. Начнем с оценки на классе Q_1 функционала $\log f'(z)$. (7)

Теорема 3.1. *В классе Q_1 функций $f(z)$ при $z \in \Pi^+_z$ имеет место точная оценка*

$$|\log f'(z)| \leqslant \log\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}. \tag{3.1}$$

(7) Под $\log\omega$ понимается в дальнейшем ветвь логарифмической функции, голоморфная на множестве $\Pi^+_z \cup \{z\colon \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $\log 1 = 0$.

Доказательство. Для функции $f(z) \equiv z$ неравенство (3.1) выполняется. Пусть теперь $f \in Q_1$ и $f(z) \not\equiv z$, $\nu = \nu(\tau, t)$ — функция из $\mathfrak{N}$, определяющая $f(z)$ по формуле $f(z) = f(z, \tau_0; \nu)$, $\tau_0 = -\{f\}_1 > 0$, где $\zeta = f(z, \tau; \nu)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{t-\zeta}, \quad \zeta|_{\tau=0} = z, \quad z \in \Pi_z^+. \tag{3.2}$$

Зафиксируем произвольное $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Pi_z^+$ и обозначим $\operatorname{Im} f(z_0, \tau; \nu) = b(\tau) = b$. Из (3.2) находим, что

$$\frac{db}{b} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{|t-\zeta_0|^2} d\tau > 0, \quad \zeta_0 = f(z_0, \tau; \nu). \tag{3.3}$$

Следовательно, $b(\tau)$ на промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ монотонно возрастает от $b(0) = \operatorname{Im} z_0 = y_0$ до $b(\tau_0) = \operatorname{Im} f(z_0) = y_1$.

Из (3.2) дифференцированием по z имеем

$$\frac{d \log \zeta_z'}{d\tau} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta)^2}, \tag{3.4}$$

откуда интегрированием по τ от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_0$ получаем

$$\log f'(z_0) = \int\limits_0^{\tau_0} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta_0)^2} = \int\limits_0^{\tau_0} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\alpha}}{|t-\zeta_0|^2} \nu(\tau, dt), \tag{3.5}$$

где $\alpha = \arg(\zeta_0 - t)$, $0 < \alpha < \pi$. Из (3.5) имеем неравенство

$$|\log f'(z_0)| \leqslant \int\limits_0^{\tau_0} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{|t-\zeta_0|^2},$$

которое после замены переменного в интеграле по τ согласно (3.3) запишем в виде

$$|\log f'(z_0)| \leqslant \int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{db}{b} = \log \frac{y_1}{y_0},$$

что равносильно (3.1).

Равенство в (3.1) доставляется функцией $f_a(z)$ вида (2.1) при $a = \operatorname{Re} z_0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *В классе Q_1 функций f при $z_0 \in \Pi_z^+$ имеют место оценки*

$$\frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Im} f(z_0)} \leqslant |f'(z_0)| \leqslant \frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0}, \tag{3.6}$$

$$\log \frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Im} f(z_0)} \leqslant \arg f'(z_0) \leqslant \log \frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0}. \tag{3.7}$$

Оценка слева в (3.6) точная; при $f(z) \not\equiv z$ знак равенства в правой части (3.6) не возможен ни в одной точке $z_0 \in \Pi_z^+$.

Замечание о невозможности знака равенства в правой части (3.6) следует из того, что величина α в (3.5) не может принимать значения 0 или π.

Неравенства (3.1), (3.6), (3.7) уточняют и дополняют неравенства (1.2) и (1.5), справедливые на классах $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}_\beta$ соответственно на случай функций подкласса Q_1 однолистных функций из $\mathscr{R}_1^0$.

Следующий результат уточняет неравенство (1.14) в случае $f \in Q_1$.

Теорема 3.2. *В классе Q_1 функций $f(z)$ при $z_0 \in \Pi_z^+$ имеет место точная оценка*

$$\frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0} \leqslant \sqrt{1 + \frac{2c}{(\operatorname{Im} z_0)^2}}, \tag{3.8}$$

где $c = -\{f\}_1$.

Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство $b\,db < d\tau$, вытекающее из (3.3).

Из оценок (3.1), (3.8) непосредственно вытекает

Следствие 2. *Для любой функции $f \in Q_1$ при $z_0 \in \Pi_z^+$ выполняется неравенство*

$$|\log f'(z_0)| \leqslant \frac{1}{2} \log \left[1 + \frac{2c}{(\operatorname{Im} z_0)^2}\right], \tag{3.9}$$

где $c = -\{f\}_1$.

Оценка (3.9) уточняет (1.15) в случае $f \in Q_1$. Знаки равенства в (3.8), (3.9) доставляются функцией (2.1).

Теорема 3.3. *Пусть $f \in Q(c)$, $c > 0$, z_1, z_2 — произвольные две точки из Π_z^+, $z_1 = z_2$. Тогда*

$$\left|\log \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leqslant \frac{c}{\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}.$$

Доказательство вытекает из интегрального представления

$$\log \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \int\limits_0^{\tau_0} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta_1)(t-\zeta_2)},$$

$\zeta_k = f(z_k, \tau; \nu)$ $(k = 1, 2)$, $\tau_0 = c = -\{f\}_1$, легко получаемого из (3.2).

Приемом, аналогичным используемому при доказательстве теоремы 3.1, из уравнения (2.19) получается

Теорема 3.4. *В классе Q_1^* функций f при каждом $z_0 \in \Pi_z^+$, $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$, имеет место точная оценка*

$$\left|\log \frac{f(z_0) f'(z_0)}{z_0}\right| \leqslant \log \frac{\operatorname{Re} f(z_0) \operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Re} z_0 \operatorname{Im} z_0}.$$

2. Пусть $f \in Q_1$. Рассмотрим линии

$$L(f, y) = \{w\colon\ w = f(x+iy),\ -\infty < x < \infty,\ y = \mathrm{const}\}, \quad y > 0,$$
$$L^*(f, x) = \{w\colon\ w = f(x+iy),\ x = \mathrm{const},\ y > 0\},\ -\infty < x < \infty.$$

Линию $L(f, y)$, $y > 0$, будем называть линией уровня функции f. Семейство $L^*(f, x)$, $-\infty < x < \infty$ — семейство ортогональных траекторий к линиям уровня. (8)

Обозначим через $K(f, y)$, $K^*(f, x)$ кривизну линии $L(f, y)$, соответственно, линии $L^*(f, x)$ в точке $w = f(x+iy)$, $y > 0$. Легко установить, что

$$K(f, y) = \frac{1}{|f'(z)|}\operatorname{Im}\frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad z = x+iy, \tag{3.10}$$

$$K^*(f, x) = \frac{1}{|f'(z)|}\operatorname{Re}\frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad z = x+iy. \tag{3.11}$$

Под $K^*(f, z)$ будем понимать любую из величин $K(f, y)$, $K^*(f, x)$, $z = x+iy$.

Теорема 3.5. *Пусть $f \in Q_1$. Тогда для любого $z_0 \in \Pi_z^+$*

$$|K^*(f, z_0)| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Im} z_0}\left[\frac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0} - \frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Im} f(z_0)}\right]. \tag{3.12}$$

Для $K(f, y)$ оценка точная: при $K(f, y) < 0$ знак равенства в (3.12) *доставляется функцией* (2.1).

Доказательство. Будем применять обозначения и использовать результаты, встречавшиеся в ходе доказательства теоремы (3.1). Введем функцию

$$\Psi = \Psi(z, \tau) = \frac{\zeta''_{zz}}{\zeta'^2_z},$$

$\zeta = f(z, \tau; \nu)$, и функцию $\Psi_0 = \Psi_0(\tau) = \Psi(z_0, \tau)$. Для Ψ_0 выполнены условия $\Psi_0(0) = 0$, $\Psi_0(\tau_0) = f''(z_0)/f'^2(z_0)$. Так как в силу (3.2)

$$\frac{\zeta'''_{zz\tau}}{\zeta'^2_z} = \Psi p + q,$$

где

$$p = p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta)^2}, \quad q = q(\tau) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta)^3}, \quad \Psi'_\tau = \frac{\zeta'''_{zz\tau}}{\zeta'^2_z} - 2\Psi p,$$

то

$$\frac{d\Psi_0}{d\tau} + p_0\Psi_0 = q_0, \tag{3.13}$$

(8) В гидродинамической интерпретации, когда C_w есть плоскость течения, а $z = f^{-1}(w)$ — комплексный потенциал течения, (см. [1], § 2), линия $L(f, y)$, $y > 0$, представляет собой линию тока, $L^*(f, x)$ — линия равных потенциалов.

где

$$p_0 = p_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta_0)^2}, \quad q_0 = q_0(\tau) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta_0)^3}.$$

Здесь $\zeta_0 = f(z_0, \tau; \nu)$. Решая линейное дифференциальное уравнение (3.13) с условием $\Psi_0(0) = 0$, для величины

$$f''(z_0)/f'(z_0) = f'(z_0)\Psi_0(\tau_0),$$

с учетом равенства

$$f'(z_0) = e^{\int_0^{\tau_0} p_0\,d\tau}, \tag{3.14}$$

равносильного (3.5), найдем

$$\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} = 2\int_0^{\tau_0} d\tau\left[\exp\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(\zeta, dt)}{(t-\zeta_0)^2}\,d\zeta\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(\tau, dt)}{(t-\zeta_0)^3}. \tag{3.15}$$

Умножая обе части (3.15) на $|f'(z_0)|^{-1}$ и отделяя вещественную и мнимую части, ещё раз используя (4.14), получаем после замены переменного согласно равенству (3.3) следующие представления интересующих нас функционалов:

$$K(f, y_0) = 2\int_{y_0}^{y_1}\sin\theta\exp\left(-\int_b^{y_1}\cos 2\alpha\,\frac{db}{b}\right)\sin\alpha\,\frac{db}{b^2}, \tag{3.16}$$

$$K^*(f, x_0) = -2\int_{y_0}^{y_1}\cos\theta\exp\left(-\int_b^{y_1}\cos 2\alpha\,\frac{db}{b}\right)\sin\alpha\,\frac{db}{b^2}, \tag{3.17}$$

где

$$\theta = \theta(b) = 3\alpha + \mathop{}\limits_{y_0}^{b}\sin 2\alpha\,\frac{db}{b}, \quad \alpha = \alpha(b).$$

Теперь, чтобы получить оценки (3.12), достаточно учесть, что подинтегральная функция внешнего интеграла в (3.16) достигает при $\alpha = \pi/2$ своего наименьшего отрицательного значения, равного $-y_1/b^3$ и, кроме того, модуль этой же величины является оценкой сверху модулей подинтегральных выражений в (3.16), (3.17).

Теорема доказана.

3. Дадим теперь в качестве примера приложения уравнения типа Лёвнера–Куфарева для полуплоскости вывод вариационных формул в классе Q_1. При этом мы будем следовать схеме рассуждений, с помощью которых Н. А. Лебедев [14] и позднее В. Я. Гутлянский [15] дали способ получения вариационных формул в классах функций, однолистных в круге, из уравнения Лёвнера и из уравнения Лёвнера–Куфарева (см. также [7], с. 78–79).

Теорема 3.6. *Пусть f — произвольная функция класса Q_1 и $\omega_1 = \omega_1(\tau, t)$, $\omega_2 = \omega_2(\tau, t)$ — две вещественнозначные ограниченные функции, измеримые по τ и непрерывные по t на множестве $\overline{U}_{\tau_0}$,*

$$U_{\tau_0} = \{(\tau, t)\colon 0 < \tau < \tau_0, -\infty < t < \infty\}, \qquad \tau_0 = -\{f\}_1$$

и пусть $\nu = \nu(\tau, t)$ — функция из $\mathfrak{N}$, определяющая $f(z)$ по формуле $f(z) = f(z, \tau_0; \nu)$, где $w = f(z, \tau; \nu)$ — решение задачи Коши (3.2). Тогда в классе Q_1 существует семейство функций $f(z, \varepsilon)$, зависящих от вещественного параметра ε, такое, что при всех достаточно малых значениях $|\varepsilon|$

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(\varepsilon, \Pi_z^+), \tag{3.18}$$

где

$$P(z) = f'(z) \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_1}{t-w} - \frac{\omega_2}{t-w}\right] \frac{\nu(\tau, dt)}{w_z'}, \tag{3.19}$$

и $o(\varepsilon, \Pi_z^+)$ — величина более высокого порядка малости, чем ε, на любом множестве $\overline{\Pi_{z\delta}^+(\lambda)}$, $\delta > 0$, $0 < \lambda < \pi/2$.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \varepsilon\omega_1}{t + \varepsilon\omega_2 - \zeta} \nu(\tau, dt),$$

где ε — произвольное вещественное число, и обозначим через $\zeta = f(z, \tau, \varepsilon; \nu)$ его решение с начальным условием $\zeta|_{\tau=0} = z$, $z \in \Pi_z^+$. Можно показать, что $f(z, \tau, \varepsilon; \nu)$ при всех достаточно малых $|\varepsilon|$ представляет собой непрерывную по τ, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, голоморфную и однолистную по z в полуплоскости Π_z^+ функцию. Записывая разложение функции $f(z, \varepsilon) = f(z, \tau_0, \varepsilon; \nu) \in Q_1$ по степеням ε и замечая, что $f(z, 0) = f(z)$, приходим к формулам (3.18), (3.19).

Теорема доказана.

Укажем теперь способ получения вариационных формул к классе $Q(c)$ $(\hat{Q}(c))$ с помощью вариационных формул вида (3.18).

Дадим прежде один вспомогательный результат, верность которого проверяется непосредственно.

Лемма 3.1. *Если $f \in Q_1$, то при любом ϱ, $\varrho > 0$, классу Q_1 принадлежит также функция*

$$\varphi(z, \varrho) = \frac{1}{\varrho} \varphi(\varrho z),$$

причем $\{\varphi(z, \varrho)\}_1 = \varrho^{-2}\{f\}_1$.

Пусть $f \in Q(c)$, $c > 0$, и $f(z, \varepsilon)$ — её вариация, получаемая по теореме 3.6. Вычисление величины $c_1(\varepsilon) = \{f(z, \varepsilon)\}_1$ по формуле (см. 1, § 1)

$$c_1(\varepsilon) = -\lim_{y \to \infty} y[\operatorname{Im} f(iy, \varepsilon) - y]$$

с использованием (1.9) (при $\beta = 1$) и леммы 2.2 о предельном переходе под знаком интеграла Стильтьеса, дает

$$c_1(\varepsilon) = \tau_0 + \varepsilon q + o(\varepsilon),$$

где

$$q = -\int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 \nu(\tau, dt), \tag{3.20}$$

и $\tau_0 = -\{f\}_1 = c$.

Рассмотрим новую функцию $f^*(z, \varepsilon) = \dfrac{1}{\varrho} f(\varrho z, \varepsilon)$ при $\varrho^2 = \varrho^2(\varepsilon) = c_1(\varepsilon)/c$, $\varrho > 0$. По лемме 3.1 имеем $f^*(z, \varepsilon) \in Q(c)$. Разлагая $f^*(z, \varepsilon)$ по ε, имея в виду, что $c_1(0) = c$, $c_1'(0) = q$, получим

$$f^*(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon\left[P(z) + \frac{q}{2\tau_0}(zf'(z) - f(z))\right] + o(\varepsilon, \Pi_z^+), \qquad \tau_0 = -\{f\}_1. \tag{3.21}$$

Итак, доказана

Теорема 3.7. *Пусть $f \in Q(c)$, $c > 0$, и выполнены все условия теоремы 3.6. Тогда классу $Q(c)$ принадлежит зависящее от вещественного параметра ε семейство функций $f^*(z, \varepsilon)$ такое, что при всех достаточно малых $|\varepsilon|$ выполнено равенство (3.21) с величинами $P(z)$ и q, определяемыми равенствами (3.19) и (3.20).*

Очевидно, что если в формулировке этой теоремы везде вместо $Q(c)$ писать $\hat{Q}(c)$ и считать по-прежнему $\tau_0 = -\{f\}_1 > 0$ (однако теперь будет $\tau_0 \leqslant c$), то получится также верное утверждение. Другими словами, формула (3.21) дает вид вариационной формулы не только в классе $Q(c)$, но и в объемлющем $Q(c)$ классе $\hat{Q}(c)$.

Наличие на компактном в себе классе $\hat{Q}(c)$, $c > 0$, (см. следствие к теореме 1.3) вариационной формулы вида (3.21), содержащей две произвольные функции ω_1, ω_2, выбор которых достаточно широк, открывает принципиальную возможность решения на классе $\hat{Q}(c)$ вариационным методом тех или иных экстремальных задач. Упомянем без доказательства один из результатов, получающихся на этом пути (ср. с результатами 1 настоящего параграфа).

Теорема 3.8 ([16]). *На классе $Q(c)$, $c > 0$, функций $f(z)$ имеют место точные при любом фиксированном $z_0 \in \Pi_z^+$ оценки*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2c/y_0^2}} \leqslant |f'(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\sigma} e^{\sigma - 1/2},$$

где

$$\sigma = \frac{y_0^2}{c}\left(\sqrt{1 + \frac{c}{y_0^2}} - 1\right), \qquad y_0 = \operatorname{Im} z_0.$$

Литература

[1] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва 1966.

[2] Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, Москва 1968.

[3] М. Г. Крейн и А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, Москва 1973.

[4] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, Харьков 1938.

[5] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва 1966.

[6] Г. Е. Шилов, *Математический анализ, Специальный курс*, Физматгиз, Москва 1960.

[7] И. А. Александров, *Параметрические продолжения в теории однолистных функций*, Наука, Москва 1976.

[8] П. П. Куфарев, В. В. Соболев, Л. В. Спорышева, *Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости*, Вопросы геометрической теории функций, вып. 5 (1968) (Тр. Томского ун-та 200), 142–164.

[9] В. В. Соболев, *Параметрические представления для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости*, Учен. зап. Кемеровского пед. ин-та 23 (1970), 30–41.

[10] С. Т. Александров, *Параметрическое представление функций однолистных в полуплоскости*, Вопросы геометрической теории функций, вып. 9 (находится в печати).

[11] В. Я. Гутлянский, *Параметрическое представление однолистных функций*, ДАН СССР 194 (1970), 750–753.

[12] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, Москва 1958.

[13] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ИЛ, Москва 1954.

[14] Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки и задачи на экстремум в теории конформного отображения*, Диссертация, Ленинградский ун-т, 1951.

[15] В. Я. Гутлянский, *Параметрические представления и экстремальные задачи в теории однолистных функций*, Диссертация, Киев, Матем. ин-т АН УССР, 1972.

[16] Т. Н. Селляхова, *Исследование экстремальных свойств одного класса однолистных конформных отображений полуплоскости в себя*, Вопросы геометрической теории функций, вып. 8 (1977) (Тр. Томского ун-та), 55–70.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

ON THE DOMAINS OF EXISTENCE FOR PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

URBAN CEGRELL*

Department of Mathematics, Uppsala University
Thunbergsvägen 3, S-752 38 Uppsala, Sweden

1. Introduction

Let U be an open subset of $\boldsymbol{C}^n$ and denote by $\mathrm{PSH}(U)$ the plurisubharmonic functions on U. In Cegrell ([3], p. 322) it is proved that there is an open subset $\tilde{U}$ containing U such that

(1) $|_U\colon \mathrm{PSH}(\tilde{U}) \to \mathrm{PSH}(U)$ is a bijection.

(2) If $|_U\colon \mathrm{PSH}(V) \to \mathrm{PSH}(U)$ is a bijection then $V \subset \tilde{U}$.

Here $|_U$ denotes the restriction map.

The purpose of this paper is to study the situation where

$$|_U\colon \mathrm{PSH}(V) \to \mathrm{PSH}(U)$$

is a surjection, not necessarily a bijection. We wish to point out that we know of no example where the restriction map is surjective without being bijective.

2. Domains of existence

Definition. Let U be an open connected subset of $\boldsymbol{C}^n$. We say that U is a *domain of existence* for the plurisubharmonic functions on U if there is a plurisubharmonic function on U which cannot be extended as a plurisubharmonic function to any open connected set strictly containing U.

In the same way we may speak about domains of existence for analytic functions, pluriharmonic functions and so on.

Example. Any pseudoconvex domain is an example of a domain of existence for the plurisubharmonic functions. The converse is not true. Cf. Bremermann [2] and Cegrell [3], p. 329.

Theorem 2.1. *Let U be an open connected subset of $\boldsymbol{C}^n$. Then there exists an*

* Supported by the Swedish Natural Science Research Council Contract No. F 3435-100.