PetFys — Øving 3

Skisse til løsning

a) I likevekt, langs overflaten, så gjelder Young-Laplace sin ligning,

$$p_c = \sigma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) = \Delta\rho g z,$$

og $R_1 = \infty$, siden veggen er plan. Videre er

$$R_2 = \frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''}, \quad z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \quad z'' = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}.$$

Får da

$$\frac{2z}{a^2} - \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} = 0,$$

og integrert en gang gir dette

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{1}{(1+z'^2)^{1/2}} = C_1,$$

hvor C_1 er en integrasjonskonstant. Når $x \to \infty$: $z \to 0$ og $z' \to 0$, slik at $C_1 = 1$ og dermed

$$\frac{1}{\sqrt{(1+z'^2)}} = 1 - \frac{z^2}{a^2}. \qquad \qquad (1)$$

Når $x = 0$ er $z = h$ og $z' = -\cot\theta = -1/\tan\theta$. Da blir

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}} = 1 - \frac{h^2}{a^2},$$

og

$$h = a\sqrt{1-\sin\theta}.$$

b) Ligning 1 kan omformes slik:

$$
\begin{aligned}
1+z'^2 &= \frac{1}{(1-\frac{z^2}{a^2})^2} \\
z'^2 &= \frac{1}{(1-\frac{z^2}{a^2})^2} - 1 \\
&= \frac{1-1+\frac{2z^2}{a^2}-\left(\frac{z}{a}\right)^4}{\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{z^2}{a^2}(2-\frac{z^2}{a^2})}{\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)^2} \\
z' &= \frac{\frac{z}{a}(2-\frac{z^2}{a^2})^{1/2}}{\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)}{\frac{z}{a}(2-\frac{z^2}{a^2})^{1/2}}\mathrm{d}z = \mathrm{d}x
$$

$$
\frac{1}{\frac{z}{a}(2-\frac{z^2}{a^2})^{1/2}}\mathrm{d}z - \frac{\frac{z}{a}\mathrm{d}z}{(2-\frac{z^2}{a^2})^{1/2}} = \mathrm{d}x.
$$

Integralet av det første leddet kan finnes ved å skrive leddet som

$$
\frac{1}{\frac{z^2}{a^2}\left(2\left(\frac{a^2}{z^2}\right)-1\right)^{1/2}}\mathrm{d}z,
$$

og så innføre ny variabel u ved å sette $u = a\sqrt{2}/z$, $\mathrm{d}u = -a\sqrt{2}/z^2\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z = -z^2/a\sqrt{2}\,\mathrm{d}u$. Da blir det første leddet lik

$$
-\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2-1)},
$$

og integrert blir dette

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\text{arctanh}(u).$$

Integralet av det andre leddet finnes direkte som

$$a\left(2-\frac{z^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

og integralet av dx er x. Dermed er løsningen gitt ved

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\text{arctanh}(\frac{a\sqrt{2}}{z})+a\left(2-\frac{z^2}{a^2}\right)^{1/2}=x+C_2,$$

hvor C_2 er en integrasjonskonstant som bestemmes ved at når $x=0$ så er $z=h=a\sqrt{1-\sin\theta}$.