HØGSKOLEN I STAVANGER

AVDELING FOR TEKNISK - NATURVITENSKAPELIGE FAG

DATO: 29. FEBRUAR 2000

EKSAMEN I: TE 6192 Reservoarsimulering, innføring

VARIGHET: kl 09.00 – 14.00

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator

OPPGAVESETTET BESTÅR AV: 4 sider

MERKNADER: Ingen

Oppgave 1

Øving 7 omhandler radiell strøm av et fluid i en dimensjon. Det ble brukt et *blokkfordelt* numerisk rutnett: Blokkene ble først fordelt og deretter ble trykkpunktene plassert i blokkene ved hjelp av Darcy's lov.

Ved et *punktfordelt* rutenettet fordeles først trykkpunktene slik at trykkfallet mellom dem er konstant i stasjonær periode. Deretter velges blokkgrensene slik at vi får korrekt volumstrøm mellom blokkene.

Gitt ligningen

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\lambda\frac{\partial p}{\partial r}) = \phi\frac{\partial b}{\partial t}, \quad \text{hvor } \lambda = \frac{kb}{\mu}, \qquad (1)$$

som skal diskretiseres med punktfordelt rutenett. Vi bruker notasjonen at trykkpunktet er ved radius r_i for blokk i med blokkgrensene $r_{i-1/2}$ og $r_{i+1/2}$.

a) Darcy's lov for radielt system er

$$q = -2\pi rh\lambda\frac{\partial p}{\partial r}. \qquad (2)$$

Anta stasjonær strøm og at λ er konstant. Videre settes $r_1 = r_w$ og $r_N = r_e$, slik at reservoaret med høyde h blir delt i $N-1$ intervaller.

Vis at dersom trykkfallet mellom alle nabopunkter skal være det samme, så må

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \left(\frac{r_e}{r_w}\right)^{1/(N-1)}. \qquad (3)$$

b) Finn to uttrykk for volumraten q mellom trykkpunktene r_{i+1} og r_i ved først å integrere ligning 2 og deretter diskretisere samme ligning. Vis at dette fører til følgende krav til blokkgrensen $r_{i+1/2}$,

$$r_{i+1/2} = (r_{i+1} - r_i)/\ln(r_{i+1}/r_i). \qquad (4)$$

c) Vis at ved å diskretisere ligning 1 så blir strømmen mellom r_i og r_{i+1} gitt ved

$$\frac{\lambda_{i+1/2} \cdot r_{i+1/2}}{r_i(r_{i+1/2} - r_{i-1/2})} \frac{p_{i+1} - p_i}{r_{i+1} - r_i}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

d) Ligning 5 gir volumstrøm per bulkvolum av blokk i. Beregn volumraten q fra ligning 5 og innfør deretter betingelsen fra ligning 4 og vis at q først blir korrekt i grensen at $N \to \infty$.

e) En bedre diskretisering kan oppnås med ny variabel $\rho = r^2$. Vis at kravet i ligning 4 da blir

$$\rho_{i+1/2} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\ln(\rho_{i+1}/\rho_i)}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

f) Utled et uttrykk tilsvarende ligning 5 med ρ som variabel og vis at en nå får korrekt volumstrøm q mellom trykkpunkt i og $i+1$, uavhengig av N.

g) Diskuter kort hvorledes de to diskretiseringsmetodene, bruk av r og ρ, vil gi utslag på trykkløsningen i transient og stasjonær strøm.

Oppgave 2

Diffusivitetsligningen for strøm av en svakt kompressibel væske (vann eller olje) gjennom et porøst medium kan skrives på dimensjonsløs form som

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

med de dimensjonsløse størrelsene p, x og t gitt ved $p = (P - P_i)/P_i$, $x = X/L$, $t = Tc_1^2/L^2$. Her er L lengden av reservoaret i ft, P_i initielt trykk og $1/c_1^2 = (\phi\mu \cdot \mathrm{d}b/\mathrm{d}P)/(Ckb)$. Videre er P er trykket i psi, X er avstand i ft, k er permeabiliteten i md, b er invers volumfaktor i stb/rb, μ er viskositeten i cp og T er tiden i døgn. Anta at b i strømningsleddet, $\mathrm{d}b/\mathrm{d}P$, μ og k er konstanter. Omregningskonstanten C er lik 0.00632827.

a) Vis at eksplisitt numerisk formulering med differansemetoden gir ligningen

$$\frac{p_{i-1,n} - 2p_{i,n} + p_{i+1,n}}{(\Delta x)^2} = \frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{\Delta t}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

dersom alle blokkene har samme lengde Δx. Her er p_i trykket i midtpunktet av blokk i og $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ er tidsstegslengden.

b) Anta at løsningen $p(x,t)$ av ligning 7 eksisterer som et produkt av en funksjon $\psi(t)$ av tiden og en annen funksjon som kun avhenger av x. Denne siste funksjonen rekkeutvikles i en kompleks Fourierrekke med ledd av formen $\mathrm{e}^{j\beta x}$ hvor β er et reelt tall og $j = \sqrt{-1}$. Et ledd i rekkeutviklingen av løsningen $p(x,t)$ kan da representeres ved $\psi(t)\mathrm{e}^{j\beta x}$. Sett inn dette i ligning 8 og vis at forsterkningsfaktoren $\xi = \psi(t+\Delta t)/\psi(t)$ for eksplisitt formulering er gitt ved

$$\xi = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}, \quad \text{hvor } \lambda = \Delta t/(\Delta x)^2. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Oppgitt: $\mathrm{e}^{j\beta x} = \cos\beta x + j \sin\beta x$,
$1 - \cos\beta x = 2\sin^2 \beta x/2$.

c) For at den numeriske løsning skal være stabil og ikke vokse over alle grenser når Δt øker eller Δx minker, så må $|\xi| \leq 1$. Vis at dette krever at $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

d) I Øving 4 ble følgende data brukt til å undersøke stabilitet og diskretiseringsfeil av tre numeriske formuleringer. Enhetene er som angitt under spørsmål a). Fra hvilket tidssteg av kan en forvente ustabilitet av den eksplisitte formuleringen?

```
mx = 6
kx = 100
phi = 0.05
dex = 10
borig = 0.7889
visorg = 1.358
dbdp = 8.03d-06
delmin = 0.000015415
dtmult = 1.5
```

e) Vis at implisitt numerisk formulering av ligning 7 gir en ubetinget stabil løsning.

Oppgave 3

Svar kort på følgende spørsmål:

a) Hva er fordelene og ulempene med Crank-Nicolson formuleringen?

b) Hvorfor brukes oppstrøms relative permeabiliteter?

c) Forklar om en trenger et nummereringsskjema for trykkene i blokkene dersom det skal simuleres strøm av en fase i to dimensjoner med eksplisitt formulering.

d) Forklar hvordan en i Fortran 90 kan få til variabel dimensjonering av matriser ved hjelp av inngangsdata. Forklar også hvilke to måter som kan brukes til å utveksle verdier av variable mellom hovedprogram og subrutiner.

e) Gitt et reservoar med innslag av tynne, tette, sirkelformede, kalsittsementert "lokk" av noen meters utstrekning. Du skal simulere et vertikalt tverrsnitt av reservoaret. Dette tverrsnittet kutter gjennom flere av "lokkene." Den numeriske modellen bruker rektangulære blokker og har opsjon for lokal rutenettforfining. Hvordan vil du designe rutenettet rundt et tverrsnitt av et "lokk"?