Skisse til løsning

Eksamen i Reservoarsimulering, innføring
29. februar 2000.

1a)

$$(N-1)\ln\frac{r_{i+1}}{r_i} = \ln\frac{r_e}{r_w},$$

som ordnet gir oppgitt formel.

1b) Integrert:

$$q_e = -2\pi\lambda h\frac{p_{i+1}-p_i}{\ln(r_{i+1}/r_i)},$$

hvor indeks e står for eksakt, og diskretisert

$$-q_{i+1/2} = 2\pi r_{i+1/2} h\lambda_{i+1/2}\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{r_{i+1}-r_i}\right).$$

Settes disse to ratene lik hverandre og brukes at λ er konstant, så får vi oppgitt formel.

1c) Dette er rett fram, tilsvarende som i forelesningene, for lineært system.

1d) Ved å multiplisere med $\pi h(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)$ og bruke ligning 4 i oppgaveteksten finner en at volumraten blir korrekt lik q_e dersom $(r_{i+1/2}+r_{i-1/2})/2 = r_i$. Og det skjer bare i grensen når blokklengdene blir korte, når $N \to \infty$.

1e) Darcy's lov blir, med $dr = d\rho/2r$,

$$-q = 4\pi\rho\lambda h\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}.$$

Dette uttrykk er det samme som med r som koordinat. Ligning 4 i oppgaven, som framkommer ved å sammenligne integrert og diskretisert for av Darcy's lov, blir da uendret, med r erstattet med ρ, altså ligning 6 i oppgaven.

f) Med transformasjonen $\rho = r^2$, blir diffusivitetsligningen

$$4\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\lambda\frac{\partial p}{\partial\rho}\right) = \phi\frac{\partial p}{\partial t},$$

og strømmen mellom blokk $i+1$ og i,

$$\frac{4}{(\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})}\left(\rho_{i+1/2}\lambda\frac{p_{i+1} - p_i}{\rho_{i+1} - \rho_i}\right)$$

multiplisert med volumelementet $\pi h(\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})$ og innføring av

$$\rho_{i+1/2} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\ln(\rho_{i+1}/\rho_i)}$$

bli nå lik den integrerte form av Darcy's lov

$$4\pi\lambda h\frac{p_{i+1} - p_i}{\ln(\rho_{i+1}/\rho_i)}.$$

Diskretiseringen i ρ gir altså eksakt volumrate mellom trykkpunkt $i+1$ og i.

1g) Siden volumene knyttet hvert trykkpunkt ikke er korrekte dersom en diskretiserer med r, så blir trykkløsningen feil i transient periode. Etter at stasjonær strøm er oppnådd, så blir svarene med diskretisering i r og ρ like.

2a) Vi har

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-}}{\Delta x} = \frac{\partial p}{\partial t},$$

hvor index $i+$ betyr 'tatt ved høyre blokkgrense' og indeks $i-$ betyr 'tatt ved venstre blokkgrense' av blokk `i`. Videre har vi at

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+} = \frac{p_{i+1,n} - p_{i,n}}{\Delta x}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-} = \frac{p_{i,n} - p_{i-1,n}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{\Delta t},$$

hvor n angir 'gammelt' tidsnivå, $n+1$ 'nytt' tidsnivå. Indeks i angir trykket i midtpunktet av blokk nummer i og tilsvarende for $i+1$ og $i-1$. Merk at begge avstandsderiverte av p er tatt ved tidsnivå n, slik som det eksplisitte skjemaet krever. Trukket sammen så fås uttrykket i oppgaven.

2b) Innsatt får vi

$$\frac{\psi(t+\Delta t)\mathrm{e}^{j\beta x} - \psi(t)\mathrm{e}^{j\beta x}}{\Delta t} = \frac{\psi(t)}{(\Delta x)^2}\left[\mathrm{e}^{j\beta(x-\Delta x)} - 2\mathrm{e}^{j\beta x} + \mathrm{e}^{j\beta(x+\Delta x)}\right],$$

og deretter

$$\begin{aligned}&(\frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)} - 1)\mathrm{e}^{j\beta x} = \\ &\quad \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\mathrm{e}^{j\beta x}\left[\cos\beta\Delta x - j\sin\beta\Delta x - 2 + \cos\beta\Delta x + j\sin\beta\Delta x\right],\end{aligned}$$

som gir

$$\xi = \frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)} = 1 + 2\lambda(\cos\beta\Delta x - 1) = 1 - 4\lambda\sin^2\frac{\beta\Delta x}{2}.$$

2c) Siden $\max(\sin^2\frac{\beta\Delta x}{2}) = 1$, så må $\lambda \leq \frac{1}{2}$ forat $\xi \leq 1$.

2d) Ved innsetting av oppgitte data finner en at $c_1^2 = 9.16E+05$, og at $0.141 * 1.5^l = 0.5$ når l er tidsstegtelleren og multiplikatoren på tidsstegslengden er `dtmult = 1.5`. Av dette finner en at $k = 3.12$, altså etter ca. 4 tidssteg. Dersom verdien av $\sin^2\frac{\beta\Delta x}{2}$ holder seg under 1, så vil antall tidssteg kunne bli noe større før ustabiliteten merkes.

2e) Differanseskjemaet blir nå

$$\frac{p_{i-1,n+1} - 2p_{i,n+1} + p_{i+1,n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{\Delta t}, \qquad (1)$$

og setter vi inn $p_{i,n} = \psi(t)\mathrm{e}^{j\beta x}$, så får vi etter litt forenkling,

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\lambda\sin^2\frac{\beta\Delta x}{2}},$$

slik at $\xi \leq 1$ for alle λ og implisitt formulering er dermed ubetinget stabil.

3c) For eksplisitt formulering trengs ingen løsningsrutine og dermed intet nummereringsskjema siden det bare en en ukjent per ligning.

d) Variabel dimensjonering får en til ved å lage en module-fil hvor matrisene står oppført uten størrelse, på formen

```
Module felles_matriser
        integer, parameter :: dp = kind(1.d0)
        integer, parameter :: sp = kind(1.0)
     real(dp), dimension(:), allocatable ::&
        a,c,d,al,s,comp,po,&
        pold,oxplus,oxmin,a9,&
        qo,bo,x
end module felles_matriser
```

Etter å ha lest inn dimensjonen `mx` (for endimensjonalt system) settes inn en `allocate`-kommando i hovedprogrammet, f.eks. `allocate(a(mx), c(mx) ...)`.

e) Gradvis mindre blokker nærmere diskontinuiteten slik at trykkfallet blir det samme mellom blokkene i stasjonær periode.