DATO: 24. NOVEMBER 2000

EKSAMEN I: TE 6192 Reservoarsimulering, innføring

VARIGHET: kl 09.00 – 14.00

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator

OPPGAVESETTET BESTÅR AV: 3 sider

MERKNADER: Ingen

---

1 Oppgave

a) Gitt diffusivitetsligningen for horisontal strøm av et fluid i en dimensjon på formen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Ckb}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q=\frac{\partial}{\partial t}(\phi b), \qquad (1)$$

hvor C er en omregningsfaktor, k absolutt permeabilitet, b invers volumfaktor, ϕ porøsitet, p trykk og q kildeledd.

Anta at først at ϕ, μ, db/dp, k er uavhengige av trykket og at b kan betraktes som konstant i strømningsleddet på venstre side av ligningen. Blokklengden Δx, k og ϕ skal være de samme for hver numeriske blokk. Ligningen kan da skrives på følgende numerisk form,

$$-a_i p_{i-1}^m + p_i^{n+1} - c_i p_{i+1}^m = d_i, \qquad (2)$$

hvor m enten er lik $n+1$ eller n og n angir tidsnivået slik at tidssteget er gitt ved $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Start med ligning (1) og utled uttrykk for a_i, c_i, d_i for (i) implisitt og (ii) eksplisitt formulering.

b) Skriv ut hvordan ligning (2) blir for første og siste blokk i et lukket reservoar.

2 Oppgave

Nå fjernes antagelsen i Oppgave (1) om at b i strømningsleddet på venstre side av ligning (1) skal være konstant. De andre antagelsene gjelder fortsatt. Ligningen skal formuleres på *fullstendig implisitt* form hvor også b skal beregnes ved slutten av tidssteget ved nytt trykk p^{n+1}. I strømningsledd mellom to naboblokker brukes avstandsmiddel. Det vil si at mellom blokk i og $im = i-1$ brukes $(b_i + b_{im})/2$ med $b_i = b(p_i^{n+1})$ og $b_{im} = b(p_{im}^{n+1})$ og tilsvarende mellom blokk i og $ip = i+1$. Merk at det her ikke skal brukes tidsmiddel av volumfaktoren slik som i kompendiet.

a) Bruk den forenklende notasjonen at $p^{n+1} \equiv p$ og vis at ligning (1) nå kan skrives på den numeriske formen

$$-A_i(b_i, b_{im}) \cdot p_{im} + B_i(b_{im}, b_i, b_{ip}) \cdot p_i - C_i(b_i, b_{ip}) \cdot p_{ip} = D_i. \qquad \dots\dots\dots (3)$$

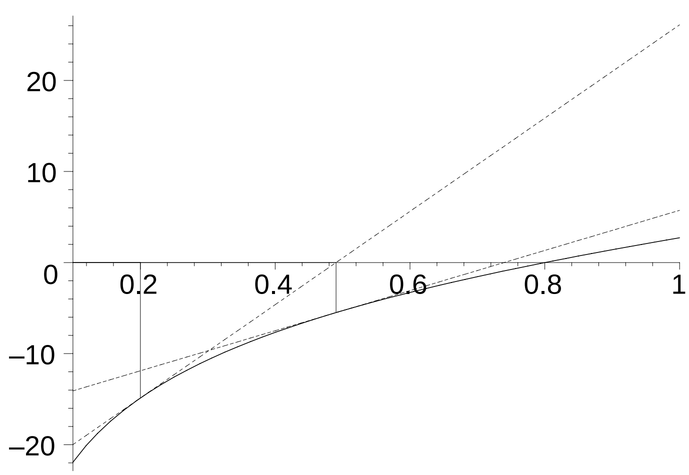
Her er A, B, C, D konstanter bortsett fra lineære uttrykk i volumfaktorer for naboblokker. Ligningen inneholder altså produktledd av formen $b(p) \cdot p$ og kan løses med Newton-Raphson sin metode som omtales i Oppgave (3).

3 Oppgave

Newton-Raphson sin metode går ut på suksessivt å følge tangenter som tilnærminger til selve kurven. Som et eksempel, la $y(x)$ være definert ved $y(x) = \exp(x) + 10\ \ln(x)$. Dersom vi skal finne løsningen til ligningen $y(x) = 0$, så kan vi starte med et tipp på løsningen, $x = x^1$, og skrive et iterasjonsskjema på følgende måte,

$$y^{k+1} = y^k + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^k \cdot \delta x = 0, \qquad \dots\dots\dots (4)$$

hvor $y^k = y(x^k)$. Denne ligningen løses for δx. Så oppdateres x-verdien ved $x^{k+1} = x^k + \delta x$, og slik fortsetter det. I figur (1) er $x^1 = 0.2$, $x^2 = 0.49$ og $x^3 = 0.75$. Disse



Figur 1: Løsning av ligningen $\exp(x) + 10\ln(x) = 0$ med Newton-Raphson sin metode

x-verdiene finnes ved at en suksessivt følger tangentene til skjæring med x-aksen, i henhold til ligning (4). I figuren er det vist de to første tangentene. Den korrekte løsningen er $x = 0.80$.

a) Skisser et Fortran90-program som løser ligningen i dette eksempelet med en gitt nøyaktighet.

4 Oppgave

Ligning (3) kan skrives som $F(p_{im}, p_i, p_{ip}) = 0$ og kan løses iterativt med Newton-Raphson sin metode. Her er F hele venstre side av ligningen etter at D_i-leddet er flyttet over. Funksjonen F beregnes ved slutten av tidsteget, ved tidsnivå $n+1$, som vi tilnærmer med iterasjonsnivå $k+1$, altså at $F^{n+1} \approx F^{k+1}$, som kan finnes med Newton-Raphson metoden,

$$F^{k+1} = F^k + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{im}}\right)^k \cdot \delta p_{im} + \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^k \cdot \delta p_i + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{ip}}\right)^k \cdot \delta p_{ip}, \qquad \dots . \quad (5)$$

hvor de ukjente er gitt ved $\delta p = p^{k+1} - p^k$ og koeffisientene er beregnet ved sist itererte trykk p^k.

a) Bruk denne utviklingen av F^{k+1} til å reformulere ligning (3) til en linearisert ligning med de tre ukjente δp_{im}, δp_i og δp_{ip} på formen

$$-a_i \cdot \delta p_{im} + \delta p_i - c_i \cdot \delta p_{ip} = d_i, \qquad \dots \dots \dots \dots . \quad (6)$$

hvor koeffisientene a, c og d nå inneholder konstanter og kjente trykkverdier fra siste iterasjonsnivå k.

b) Forklar kort hvordan vil du sjekke om trykkløsningen innen et tidssteg har konvergert?

5 Oppgave

a) Skisser, eksempelvis med 4 blokker, en numerisk prosedyre som kan brukes til direkte løsning av det lineære ligningssettet (6) ved eliminasjon.

b) Skisser også hvordan ligningssettet (6) kan løses ved Suksessive OverRelaksasjoner (SOR).