Notat: Analytisk løsning

I dette notatet er utledet en analytisk løsning på det problemet som simuleres i øving 1: Strøm av en svakt kompressibel fase (olje) gjennom et horisontalt, endimensjonalt, reservoar med grensebetingelser at trykket er det samme i alle blokker ved tid $t = 0$ da det samtidig startes injeksjon i blokk `mx` og produksjon fra blokk 1.

Det er laget et Fortran90-program, `anal.f90` med `inndat` og `utdat` som kan brukes til å beregne tallsvar fra den analytiske løsningen. Disse filene er vedlagt.

Detaljering av problemstillingen

Gitt simuleringsligningen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Ckb}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \phi \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}P}\frac{\partial P}{\partial t}, \qquad (1)$$

hvor $\mu, C, k, \phi, \mathrm{d}b/\mathrm{d}P$ er konstanter. Anta at b i strømningsleddet med god tilnærmelse kan betraktes som konstant, kfr. oppgave 1 og 2 i eksamenssettet fra desember 1995. Da får en

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\phi\mu}{Ckb}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}P}\frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (2)$$

Vi definerer nå

$$\frac{1}{c_1^2} = \frac{\phi\mu}{Ckb}\frac{db}{dP},$$

og med $C = 0.00632827$ har en samme enheter som i simuleringsprogrammet. Ligningen blir da

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (3)$$

Problemstillingen er da: I et en-dimensjonalt reservoar med lengde $2L$ og konstant tverrsnitt A, startes det ved tiden $t = 0$ samtidig injeksjon og produksjon i hver sin ende med like stor og konstant rate Q. Dette kan løses på følgende måte:

a) Utled den stasjonære (tidsuavhengige) løsningen p_s, av Ligning (3). Bruk Darcy's lov som grensevilkår og følgende trinn:

- Sett $\dfrac{\partial P}{\partial t} = 0$.
- Generell løsning av (3) er $p_s(x) = a_1 x + a_2$
- a_1 bestemmes fra Darcy's lov

- a_2 bestemmes ved at $p_s(L) = P_i$ hele tiden på grunn antisymmetri om dette midtpunktet, P_i er initielt trykk.

En finner at

- $p_s(x) = P_i - q(x - L)$,
- $q = \dfrac{Q\mu}{0.0011271kAb}$, q er et negativt tall.

b) Innføres $p(x,t) = P(x,t) - p_s(x)$ vil en se at ligning 3 blir

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (4)$$

c) Grensevilkårene blir nå

i) $\dfrac{\partial p(0,t)}{\partial x} = 0$,

ii) $p(L,t) = 0$,

ii) $p(x,0) = q(x - L)$.

d) Ligning 4 kan nå løses ved å bruke metoden med separasjon av variable ved å gjennomføre følgende trinn:

- Sett $p(x,t) = f(x)g(t)$
- Generell løsningen er

  $$p(x,t) = (a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x))\exp(-\lambda^2 c_1^2 t),$$

  hvor a, b og λ er konstanter.
- Grensevilkår i) og ii) gir løsningen

  $$p_n = a_n \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)\exp(-(\frac{(2n+1)\pi}{2L})^2 c_1^2 t).$$

  Denne løsningen tilfredstiller ikke grensevilkår iii).
- Grensevilkår iii) tilfredstilles ved å sette

  $$p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n,$$

  slik at kravet iii) medfører:

  $$a_n = -\frac{8Lq}{((2n+1)\pi)^2}.$$

- Den fullstendige løsningen blir da:

$$P(x,t) = p(x,t) + p_s(x,t),$$

$$P(x,t) = P_i - q(x-L) - 8Lq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)}{((2n+1)\pi)^2} \exp(-(\frac{(2n+1)\pi}{2L})^2 c_1^2 t). \qquad (5)$$

Testing

Det vedlagte Fortranprogrammet regner ut trykket $P(x,t)$ for et vilkårlig trykkpunkt x og tid t. Innfilen `inndat` inneholder de samme data som i øving 1 og 2 med $2L = 60$ ft, $Q = -1$STB/D etc.

a) Sammenlign trykket i blokk 1 etter 4 tidssteg fra øving 2, med trykket $P(5\text{ft}, t_0)$ fra ligning 5, med $t_0 = 0.1879 \cdot 10^{-3}$ dager.

b) Vis at numerisk løsning, trykket i blokk 1, nærmer seg analytisk løsning dersom

i) Antall blokker økes til 20, beregn $P(1.5\text{ft}, 0.1879 \cdot 10^{-3})$

ii) Antall tidssteg økes fram til omtrent samme tidspunkt ved å redusere `delmin` og `dtmult`. Når `delmin` settes lik 0.1×10^{-4} og `dtmult` settes lik 1.2 er det tilstrekkelig å inkludere 10 tidssteg (dvs. `stmax=10`).

Detaljer i analytisk løsning

Stasjonær løsning

$$\lim_{t\to\infty} P(x,t) = p_s(x), \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} = 0,$$

$$p_s = a_1 x + a_2.$$

Fra Darcy's lov:

$$\frac{\partial p_s(0)}{\partial x} = -\frac{Q\mu}{0.0011271kAb} = -q = a_1$$

Dette gir

$$p_s(x) = -qx + a_2$$

$$p_s(L) = P_i \quad \Rightarrow \quad a_2 = P_i + qL$$

$$\underline{p_s(x) = P_i - q(x-L).}$$

Omformet ligning

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial P}{\partial t}$$

Sett

$$p = P - p_s(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p + p_s(x)) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial}{\partial t}(p + p_s(x))$$

Siden

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} = 0$$

og

$$\frac{\partial p_s(x)}{\partial t} = 0$$

får en direkte

$$\underline{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial p}{\partial t}} \quad \ldots \quad (6)$$

Nye grensevilkår

i)

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial P(0,t)}{\partial x} + q = -q + q = 0,$$

siden Darcy's lov gjelder ved utløpet $x = 0$ for alle t og

$$\frac{\partial P(0,t)}{\partial x} = -q.$$

ii)

$$p(L,t) = P_i - P_i + q(L - L) = 0.$$

iii)

$$p(x,0) = P_i - P_i + q(x - L) = q(x - L).$$

Løsning ved separasjon av variable.

I ligning 6 prøver vi med $p(x,t) = f(x)g(t)$ og får

$$f''(x) \cdot g(t) = \frac{1}{c_1^2} f(x)\dot{g}(t)$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = -\lambda^2$$

hvor λ er en konstant uavhengig av x og t. f'' og $\dot{g}$ er hhv. den andre deriverte av f mhp. x og den tidsderiverte av g. Dermed har en først

$$f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0$$

Generell løsning av denne ligningen er

$$f(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

Tilsvarende får en for den tidsavhengige funksjonen:

$$\dot{g}(t) + \lambda^2 c_1^2 g(t) = 0$$

Med generell løsning

$$g(t) = \exp(-\lambda^2 c_1^2 t)$$

Setter en sammen f og g får en den generelle trykkløsningen

$$\underline{p(x,t) = (a\cos\lambda x + b\sin\lambda x)\exp(-\lambda^2 c_1^2 t)}$$

Grensevilkår i og ii

På denne generelle løsning må en nå anvende grensevilkårene i), ii) og iii) for å bestemme konstantene a, b, λ.

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = (-a\lambda\sin\lambda x + b\lambda\cos\lambda x)\exp(-\lambda^2 c_1^2 t)$$

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = b\lambda\exp(-\lambda^2 c_1^2 t) = 0$$

som gir $\underline{b = 0.}$

$$p(L,t) = a\cos\lambda L\exp(-\lambda^2 c_1^2 t) = 0$$

$$\lambda L = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\underline{\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{2L}}$$

Grensevilkår iii

$$p(x,0) = a\cos\frac{(2n+1)\pi}{2L}x = q(x-L),$$

som er en initialbetingelse er ikke oppfylt for noen konstant a. Vi prøver derfor med

$$p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,t),$$

$$p_n(x,t) = a_n\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)\exp(-(\frac{(2n+1)\pi}{2L})^2 c_1^2 t).$$

Siden hver p_n tilfredstiller ligningen og de homogene grensevilkårene i) og ii) vil også p gjore det. Fra grensevilkår iii) får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x) = q(x-L) \qquad (7)$$

Vi multipliserer nå denne ligningen med

$$\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x)$$

og integrerer over x fra 0 til $2L$ ved først å innføre nye variable

$$u = \frac{(2k+1)\pi}{2L}x, \quad dx = \frac{2L}{(2k+1)\pi}du$$

$$v = \frac{(2n+1)\pi}{2L}x.$$

Ligning 7 blir da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{(2k+1)\pi} \cos v\cos u\; du = q\int_0^{(2k+1)\pi} (\frac{2L}{(2k+1)\pi}u - L)\cos u\; du \qquad (8)$$

Vi ser først på venstre side av ligningen:

$$\begin{aligned}\int_0^{(2k+1)\pi} \cos v\cos u\; du &= \frac{1}{2}\int_0^{(2k+1)\pi} (\cos(u-v)+\cos(u+v))du \\ &= \begin{cases} \frac{(2k+1)\pi}{2}, & \text{for } u=v \text{ eller } k=n \\ 0, & \text{for } u\neq v \end{cases}\end{aligned}$$

og dermed blir venstre siden

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{2k+1}{2}\pi\cdot\delta_{n,k} = a_k\frac{(2k+1)\pi}{2}$$

Høyre side av ligning 8 blir

$$q\int_0^{(2k+1)\pi} \frac{2L}{(2k+1)\pi} u\cos u\; du - q\underbrace{\int_0^{(2k+1)\pi} L\cos u\; du}_{=0}$$

$$= \frac{2Lq}{(2k+1)\pi}\Big[\cos u + u\sin u\Big]_0^{(2k+1)\pi} = -\frac{4Lq}{(2k+1)\pi}$$

Setter en så venstre side lik høyre side får en:

$$a_k \frac{(2k+1)\pi}{2} = -\frac{4Lq}{(2k+1)\pi},$$

$$a_k = -\frac{8Lq}{[(2k+1)\pi]^2}$$

Oppsummert gir dette

$$P(x,t) = p_s(x) + p(x,t) = p_s(x) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$

$$= P_i - q(x-L) - 8Lq\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x)}{((2k+1)\pi)^2}\exp(-(\frac{(2k+1)\pi}{2L})^2 c_1^2 t).$$