HØGSKOLEN I STAVANGER

AVDELING FOR TEKNISK - NATURVITENSKAPELIGE FAG

DATO: 5. DESEMBER 1996

EKSAMEN I: TE 192 Reservoarsimulering, innføring

VARIGHET: kl 09.00 – 14.00

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator

OPPGAVESETTET BESTÅR AV: 3 sider

MERKNADER: Ingen

Oppgave 1

a) Gitt bevaringsligningen

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - q + \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = 0, \qquad (1)$$

hvor ρ er tettheten av fluidet som strømmer. Hvilken fysisk størrelse er det som bevares? Hva står symbolene u, q og ρ for og hvilke enheter kan de uttrykkes i?

b) Anta at permeabilitet og porøsitet kan betraktes som konstante og vis at ligningen for horisontal strøm av et fluid (diffusivitetsligningen) kan skrives på formen

$$k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + q = \phi\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (2)$$

c) Tilstandsligningen for en reell gass er gitt ved

$$\rho = \frac{M}{RTZ(p)}p, \qquad (3)$$

hvor M er molvekten, R er gasskonstanten og T er temperaturen. Z-faktoren er lik 1 for ideell gass og er kun en funksjon av trykk når sammensetningen av gassen kan betraktes som konstant.

Kompressibiliteten c til et fluid er definert ved

$$c = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T. \qquad (4)$$

La pseudotrykket $m(p)$ være definert ved

$$m(p) = \int_0^p \frac{\rho(p')}{\mu(p')} dp'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Vis ved hjelp av ligningene (2)–(5) at diffusivitetsligningen for en reell gass med konstant sammensetning kan skrives som

$$k\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + q = \phi\mu c\frac{\partial m}{\partial t}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

d) En numerisk løsning av ligning (6) vil gi verdien av m i hver numeriske blokk etter hvert tidssteg. Det vil derfor være nødvendig med en rask metode for å omgjøre pseudotrykk til trykk. Foreslå hvordan det kan gjøres.

e) Anta nå at kompressibiliteten c også er konstant og diskretiser (6) i tid og rom ved å bruke like lange blokker. Bruk implisitt formulering og skriv svaret på formen

$$a_i m_{i-1} - m_i + c_i m_{i+1} = -d_i. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

f) Hva er fordeler og ulemper med implisitt formulering i forhold til andre diskretiseringsskjemaer?

g) Skriv (7) på matriseform dersom $\max(i) = 4$ og forklar med ord hvordan dette ligningsettet kan løses.

h) Hvordan vil du kontrollere hvor god den numeriske løsningen er?

Oppgave 2

I forelesningene ble det innledningsvis utledet en diffusivitetsligning for horisontal strøm av en fase i en dimensjon (x) gjennom et konstant tverrsnitt (A). I denne oppgaven danner x-aksen en vinkel α med horisontalplanet og tverrsnittet av det endimensjonale reservoaret er en funksjon av x, $A := A(x)$.

a) Utled følgende diffusivitetsligning for dette problemet:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A(x)k\rho}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin\alpha\right)\right] + A(x)q = A(x)\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho). \quad \ldots \quad (8)$$

b) Bruk ligning (8) til å skrive ned diffusivitetsligningen for et radielt system. Gjør spesielt rede for om gravitasjonsleddet kan beholdes i ligningen.

c) La $r_1 = r_w$ og $r_{N+1} = r_e$ hvor N er antall blokker, r_w er brønnradius og r_e radius til ytre grense. Vis hvordan blokklengdene $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$ må velges for at trykkfallet over hver blokk skal bli like stort ved stasjonær strøm. Hvorfor er det ønskelig?

d) Forklar hvordan simulering av en trykkfallstest kan brukes til å kontrollere den numeriske modellen. Gjør spesielt rede for om en kan bruke alle datapunktene fra en simulering.

Oppgave 3

Ligningsystemet

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5, \end{array} \qquad (9)$$

skal brukes til å sammenligne tre iterative løsningsmetoder: (1) Gauss-Jordan, (2) Gauss-Seidel og (3) SOR.

a) Skriv ned iterasjonskjemaet for de tre metodene med k som iterasjonsteller.

b) La startverdiene være $x_1 = 1$ og $x_2 = 0$. Hvor mange iterasjoner trengs det for at feilen i estimatet av x_1 skal bli mindre enn 10% for de tre metodene? (For SOR brukes $\omega = 1.15$.)