

Utkast til løsning

Oppgave 1

a) Vi ser på blokk nr. i og lar A betegne grenseflaten mot naboblokken $i - 1$ i negativ x -retning og B grenseflaten mot naboen $i + 1$ i positiv x -retning. For å forenkle framstillingen setter vi hjelpestørrelsen Y lik

$$Y = \frac{Ckb_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

og diffusivitetstiligningen skrives som

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{qb_r}{\rho_r} = \phi c_f b_r \frac{\partial p}{\partial t}. \quad \dots \dots \dots (1)$$

Vi bruker differansemetoden til å diskretisere ligning 1, høyre siden i romlig x -retning, og venstre siden i tid, og får¹

$$\frac{Y_i|_B - Y_i|_A}{\Delta x} + \frac{q_i b_r}{\rho_r} = \phi c_f b_r \frac{p_i(t_{n+1}) - p_i(t_n)}{\Delta t}. \quad \dots \dots \dots (2)$$

Videre er

$$Y_i|_B \approx \frac{Ckb_r}{\mu} \frac{p_{i+1}(t) - p_i(t)}{\Delta x},$$

og tilsvarende for det andre leddet,

$$Y_i|_A \approx \frac{Ckb_r}{\mu} \frac{p_i(t) - p_{i-1}(t)}{\Delta x}.$$

Disse to uttrykkene gir henholdsvis volumstrøm av olje inn fra høyre og venstre mot blokk i og ligning 2 setter differansen lik endring av oljevolum pr. tidsenhet i blokken ved ekspansjon eller injeksjon. I disse uttrykkene for volumstrømmen inn mot blokk i må vi angi ved hvilket tidsnivå vi skal velge å bruke trykket. Det vanligste i moderne, industrielle reservoarsimuleringsmodeller er å velge t ved ny tid t_{n+1} (implisitt formulering).

Innsatt i ligning 2 får vi da

$$\begin{aligned} & \frac{Ckb_r}{\mu(\Delta x)^2} [p_{i+1}(t_{n+1}) - p_i(t_{n+1})] \\ & - \frac{Ckb_r}{\mu(\Delta x)^2} [p_i(t_{n+1}) - p_{i-1}(t_{n+1})] \\ & + \frac{q_i b_r}{\rho_r} = \phi c_f b_r (p_i(t_{n+1}) - p_i(t_n)) / \Delta t. \end{aligned}$$

¹For enkelthets skyld bruker vi fortsatt standard likhetstegn mellom venstre og høyre siden, selv om disse nå er diskretiserte tilnærminger til differensialligningens høyre og venstre side.

La oss sette $T = Ckb_r/\mu(\Delta x)^2$ og forenkle notasjonen ved å sette $p_k \equiv p_k(t_{n+1})$ for vilkårlig k . Ligningen ordnet blir da

$$Tp_{i-1} - (2T + \phi c_f b_r / \Delta t)p_i + Tp_{i+1} = -(\phi c_f b_r p_i(t_n) / \Delta t + \frac{q_i b_r}{\rho_r}).$$

Det er nå nødvendig å ta spesielt hensyn til endeblokkene. Vi skal anta at venstre endeflate av den første blokken og høyre endeflate av den siste blokken er lukket, eller sagt på en annen måte, $Y_1|_A = 0$ og $Y_l|_B = 0$, når N betegner siste blokk. For første blokk blir ligningen da

$$(T + \phi c_f b_r / \Delta t)p_1 + Tp_2 = -(\phi c_f b_r p_1(t_n) / \Delta t + \frac{q_1 b_r}{\rho_r}),$$

og for siste blokk N

$$Tp_{N-1} - (T + \phi c_f b_r / \Delta t)p_N = -(\phi c_f b_r p_N(t_n) / \Delta t + \frac{q_N b_r}{\rho_r}).$$

La m være lik 1 dersom blokknummeret i er lik 1 eller N og 2 ellers. Da kan vi definere

$$B = mT + \phi c_f b_r / \Delta t$$

$$a_i = T/B$$

$$c_i = T/B$$

$$d_i = (\phi c_f b_r p_i(t_n) / \Delta t + (\frac{q b_r}{\rho_r})_i) / B,$$

og får ligning 2 på følgende numerisk form

$$\boxed{a_i p_{i-1} - p_i + c_i p_{i+1} = -d_i} \dots \dots \dots (3)$$

b)

$$ap_{im,j} + cp_{ip,j} - p_{i,j} + ep_{i,jm} + fp_{i,jp} = -d_{i,j},$$

hvor a, c, d, e har indekser (i, j) og $im = i - 1, ip = i + 1$, etc.

Nå er

$$B = mT + \phi c_f b_r / \Delta t$$

$$a = T/B$$

$$c = T/B$$

$$e = T/B$$

$$f = T/B$$

$$d_i = (\phi c_f b_r p_i(t_n) / \Delta t + (\frac{q b_r}{\rho_r})_i) / B,$$

med $m = 4$ for en generell blokk, $m = 3$ for en kantblokk, og $m = 2$ for en hjørneblokk.

c) Se kompendiet.

Oppgave 2

a) Se kompendiet.

b) Vi har at $N \ln(r_{i+1}/r_i) = \ln(r_e/r_w)$, ved å bruke Darcy's lov og summere alle trykkfallene som skal være like over de N blokkene. Dermed får vi

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{1/N}.$$

På denne måten kan en tilnærmet få samme nøyaktighet i simuleringen over hele reservoaret.

c) Tidlige data kan ikke benyttes dersom en skal sammenligne med en rett linje i et halvlogaritmisk plott siden dette bare gjelder når dimensjonsløs tid basert på brønnradius $t_D > 25$. Data senere enn $t_{DA} = 0.1$ kan heller ikke brukes fordi da vil det simulerte brønntrykk være influert av ytre grense.

d) Ved å la blokk nr. 1 være en del av borhullet med høy permeabilitet og et porevolum (porøsitet) lik volumet av hulrom i borhullet fra reservoaret og opp til overflaten.

Oppgave 3

a) Se kompendiet for de to ligningene. Det er nødvendig å forklare metning, relative permeabiliteter, kapillartrykk.

Trykket må erstattes med potensialet (se kompedium) når reservoaret har helning, $\Phi = p + \rho gz$ for hver fase.

b) Kan for enkelthets skyld starte med midtpunktet av en blokk i vann-olje kontakten. Går en blokk opp. Regner ut trykket i hver fase fra tetthetene. Kapillartrykket er differansen mellom trykkene. Bruker kapillartrykkskurven til å finne metningen. Går videre til neste blokk og repeterer beregningen. Fortsetter inntil vannmetningen er blitt irreduksibel.

Hele denne prosessen må nå gjøres omigjen siden endringen av trykkene vil endre tetthetene. Fortsetter med en slik sløyfe inntil trykkene ikke endres mer, sjekker mot et lite tall.

Oppgave 4

a) To faser, "black oil," to dimensjoner (tre dimensjoner men to koordinataksler i sylindergeometri). Hvorfor sier seg nesten selv...

b) Radielt øker radiene med en faktor, kfr. tidligere oppgave. Vertikalt må det findeles rundt vann-olje kontakten og over laggrensene.

Det fins ingen annen måte enn å findele enda mer og se om det gir noen endring. En må også passe på at tidssteglengden gir en dominerende feil.

c) Ja, siden lagdelingen er ulik.