To faser, olje og vann, i en dimensjon

Utvid programmet til også å inkludere strøm av de to fasene olje og vann i en dimensjon for et horisontalt system.

- Bruk kvasi-implisitt formulering med kordemetoden.
- Bruk p_o og Δs_o som ukjente.
- Løs ligningssettet med SOLVE, dvs. med eliminasjon eller simultan løsning for p_o og Δs_o.
- Legg inn opsjon for produksjon mot konstant trykk, `pconst`, ved utløpet av blokk 1.
- Les inn tabell av PVT-data og bergartsdata.
- Dimensjoner til 20 blokker.
- Bruk oppstrøms relative permeabiliteter.

Testeksempelet en skal simulere tilsvarer øving 10.2 i Dake sin lærebok [**?**], sml. også øving 10.1 i samme bok.

I dette eksempelet er kapillartrykket p_c satt lik null. Vi skal likevel formulere ligningene i modellen med kapillartrykksledd. En får bruk for dette i øving 10, som behandler simulering av et laboratorieeksperiment for å må relative permeabilitetskurver, med og uten kapillartrykk.

Følgende data inngår:

- `mx` = 20 —bruk lik blokklengde
- Lengde 2000 ft, tverrsnitt 625×40 ft^2
- $\phi = 0.18$
- Initiell vannmetning $s_{wi} = 0.20$
- $B_{oi} = 1.3$ rb/stb, $c_o = 8.0 \times 10^{-6}$ psi^{-1}
- $B_{wi} = 1.0$ rb/stb, $c_w = 3.0 \times 10^{-6}$ psi^{-1}
- $\mu_o = 5.0$ cp, konstant
- $\mu_w = 0.5$ cp, konstant
- Relative permeabiliteter er gitt av tabell 10.1 i boken til Dake, og en setter $p_c = 0$
- En vannrate på 1000 stb/d injiseres i blokk nr. 20 og produksjonen skjer mot konstant trykk $\texttt{pconst} = p_i$ ved utløpet av blokk nr. 1

- Initielt trykk p_i = 2000 psia

Simuler vanndrivet i 25 år, og gjør følgende sammenligninger:

A. Ved tid ett år, plott s_w som funksjon av avstand fra injeksjonsenden beregnet fra:

1. Simuleringsmodellen
2. Buckley-Leverett teorien, se Dake [**?**], kapittel 10.

Forklar forskjellen mellom i) og ii).

B. Sammenlign

- WOR versus tid i 25 år
- NPC versus tid i 25 år

beregnet med de samme to metodene som under **A**.

Kommentarer

For strøm av en fase i en dimensjon har vi fra før

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckb}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q=\phi\frac{\partial b}{\partial t},$$

og utvidet til to faser får en etter en helt tilsvarende utledning

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{ro}b_o}{\mu_o}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right)+q_o=\phi\frac{\partial}{\partial t}(s_ob_o), \qquad \text{(1)}$$

for oljeligningen, og for vannligningen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{rw}b_w}{\mu_w}\frac{\partial p_w}{\partial x}\right)+q_w=\phi\frac{\partial}{\partial t}(s_wb_w). \qquad \text{(2)}$$

I tillegg har en definisjonen av kapillartrykk, $p_w = p_o - p_c$, og at summen av metningene må være lik en: $s_w + s_o = 1$. I disse ligningene er b_o, μ_o funksjoner kun av p_o, og b_w, μ_w kun av p_w, mens k_{ro}, k_{rw}, p_c kun er funksjoner av s_w.

Det fins mange måter å formulere ligningssettet på i numerisk forstand:

- **A** Impes metoden
- **B** Fullstendig implisitt formulering (Newton)
- **C** Kordemetoden eller kvasi-Newton

Her skal vi kort beskrive metode A og B, og gå i detalj og bruke metode C. I det følgende lar vi superskript k betegne iterasjonsnivå, og n tidsnivå, slik at modellen går fra tidsnivå n til $n+1$ ved hjelp av flere iterasjoner.

La oss først formulere ut høyre side av ligningen:

$$\begin{aligned}
\phi\frac{\partial}{\partial t}(s_ob_o) &= \frac{\phi}{\Delta t}\left((s_ob_o)^{n+1}-(s_ob_o)^n\right)\\
&= \frac{\phi}{\Delta t}\left(\overline{b_o}\cdot\Delta s_o+\overline{s_o}\cdot\Delta b_o\right)\\
&= \frac{\phi}{\Delta t}\left(\overline{b_o}\cdot\Delta s_o+\overline{s_o}\cdot\frac{\partial b_o}{\partial p_o}\Delta p_o\right),
\end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned}
\overline{b_o} &= (b_o^{n+1}+b_o^n)/2\\
\overline{s_o} &= (s_o^{n+1}+s_o^n)/2\\
\Delta s_o &= s_o^{n+1}-s_o^n\\
\Delta p_o &= p_o^{n+1}-p_o^n.
\end{aligned}$$

Tilsvarende finner en for vannligningen:

$$\phi\frac{\partial}{\partial t}(s_wb_w)=\frac{\phi}{\Delta t}\left(\overline{b_w}\cdot\Delta s_w+\overline{s_w}\cdot\frac{\partial b_w}{\partial p_w}\Delta p_w\right).$$

IMPES-metoden

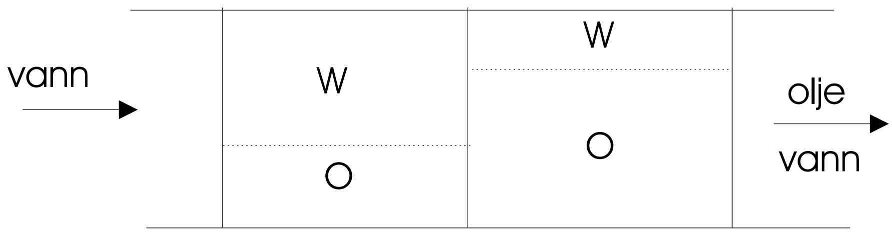
Betegnelsen *IMPES* er et akronym for *Implicit Pressure Explicit Saturation*. De metningsavhengige størrelsene, k_{ro}, k_{rw}, p_c, holdes fast på tidsnivå n, mens en løser trykket implisitt for tidsnivå $n+1$. Siden $\Delta s_w = -\Delta s_o$, elimineres Δs_o på høyre side av ligningen og en står igjen med en ligning i trykk. Denne ligningen er fremdeles ulinær siden b, μ avhenger av trykk, og $\overline{s_o}$ inngår. Grovt sett løses den i følgende trinn:

1. Foreta en implisitt løsning av trykkene
2. Beregn Δs_o fra ligning 1 eller 2
3. Oppdater koeffisienter og $b, \mu, \overline{s_o}, \overline{s_w}$ etc.
4. Start på punkt 1. igjen

Denne metode fungerer godt dersom det ikke er for "store" metningsendringer per tidssteg. Den blir derfor ofte brukt i full felt modeller hvor de numeriske blokkene er store. Trykket løses ved eliminasjon eller LSOR.

Oppstrøms relative permeabiliteter

I strømningsleddet på venstre side av oljeligningen 1 inngår leddet $k_{ro} b_o/\mu_o$. For strøm av en fase, hvor $k_{ro} = 1$, har vi tidligere brukt middelverdi av b_o/μ_o både i tid og avstand. Dette kan ikke gjøres uten videre for k_{ro}, som eksemplifisert: Figuren illustrerer



Figur 1: Illustrasjon av oppstrøms relative permeabiliteter

et vanndriv fra venstre mot høyre. I blokk i er oljemetningen s_{or} og $k_{ro} = 0$. I blokk ip er $s_o > s_{or}$ og $k_{ro} > 0$. Dersom k_{ro} midles arimetisk mellom de to blokkene, så vil transmissibiliteten til olje bli større enn null. Olje vil strømme fra blokk i til blokk ip og oljemetningen i blokk i vil bli redusert til en verdi under s_{or}. Dette er ufysikalsk og det foreslåtte en rekke metoder i litteraturen for å bøte på dette:

- Harmonisk midling
- Topunkts oppstrøms relative permeabiliteter
- Oppstrøms relative permeabiliteter

Vi skal bruk oppstrøms relative permeabiliteter, som vel er den vanligste formuleringen. For hvert tidssteg, ev. etter første iterasjon, sjekkes hvilken retning oljestrømmen har, fra $i \rightarrow ip$ eller $ip \rightarrow i$. I transmissibiliteten mellom de to blokkene velges så oppstrøms verdi av k_{ro}.

Fullstendig implisitt formulering

Vi ser på strømningsleddet

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{ro}b_o}{\mu_o}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right)$$

mellom blokk i og ip og skriver dette på formen $\mathtt{ckx_{ip}} \cdot F(p_{oi}, p_{oip}, s_{oi}, s_{oip})$, hvor $\mathtt{ckx_{ip}}$, som før, inneholder de konstante deler av transmissibiliteten mellom ip og i, og

$$F(p_{oi}, p_{oip}, s_{oi}, s_{oip}) = \frac{k_{ro}b_o}{\mu_o}(p_{oip} - p_{oi}).$$

Vi bruker Newton's metode på F, eller sagt på en annen måte, vi rekkeutvikler F til første orden i alle variable:

$$F^{k+1} \simeq F^k + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{oi}}\right)^k \Delta p_{oi}^{k+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{oip}}\right)^k \Delta p_{oip}^{k+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial s_{oi}}\right)^k \Delta s_{oi}^{k+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial s_{oip}}\right)^k \Delta s_{oip}^{k+1}.$$

Her må en generelt ta med både Δs_{oi} og Δs_{oip} siden en ikke vet hvilken vei strømmen går. Ved oppstrøms relative permeabiliteter er enten $(\partial F/\partial s_{oi})^k$ eller $(\partial F/\partial s_{oip})^k$ lik null. Strømningsleddet i vannligningen formuleres tilsvarende. Høyre sidene av ligningen uttrykkes også i $\Delta p_{oi}^{k+1}, \Delta s_{oi}^{k+1}$. En får da to ligninger med to ukjente, Δp_o^{k+1} og Δs_o^{k+1}, som det løses for ved eliminasjon eller med (L)SOR. Merk at $\Delta p_{oi}^{k+1}, \Delta s_{oi}^{k+1}$ er endringer per Newton iterasjon —ikke endringer over tidssteget.

Kordemetoden – kvasi-Newton

Metoden kan illustreres ved å formulere uttrykket for k_{ro}:

$$k_{ro}^{n+1} \simeq k_{ro}^n + \frac{k_{ro}^{n+1,k} - k_{ro}^n}{s_o^{n+1,k} - s_o^n}\Delta s_o^{n+1,k+1}. \qquad (3)$$

Her er

$k_{ro}^{n+1,k}$ verdien av k_{ro} etter iterasjon k,

$s_o^{n+1,k}$ verdien av s_o^{n+1} etter iterasjon k,

$\Delta s_o^{n+1,k+1} = s_o^{n+1,k+1} - s_o^n$.

Når løsning har konvergert er $s_o^{n+1,k+1} = s_o^{n+1}$, $k_{ro}^{n+1,k} = k_{ro}^{n+1}$, $\Delta s_o^{n+1,k+1} = \Delta s_o = s_o^{n+1} - s_o$, og ligning 3 er eksakt oppfylt.

De trykkavhengige størrelsene, b_o/μ_o, b_w/μ_w, er kun svakt avhengige av trykket. Det er derfor tilstrekkelig å behandle dem som før, dvs. bruke tids- og avstandsmiddel.

Vi ser videre på strømningsleddene mellom blokk i og ip i oljeligningen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{ro}b_o}{\mu_o}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right) \rightarrow \mathtt{ckx_{ip}} \cdot \overline{\overline{\left(\frac{\mathtt{b_o}}{\mu_\mathtt{o}}\right)}}_{\mathtt{i,ip}} \cdot \mathtt{k_{ro}} \cdot (\mathtt{p_{oip}} - \mathtt{p_{oi}}),$$

hvor $\overline{\overline{(\mathtt{b_o}/\mu_\mathtt{o})}}_{\mathtt{i,ip}}$ er tids- og avstandsmiddel. La oss definere $\mathtt{bovo_{ip}} \equiv \overline{\overline{(\mathtt{b_o}/\mu_\mathtt{o})}}_{\mathtt{i,ip}}$. Videre kan vi sette:

$$\begin{aligned} k_{ro} &= \mathtt{fdo_i} * \mathtt{krold_i} + \mathtt{fdo_i} * \mathtt{dkods_i} * \mathtt{dso_i} \\ &\quad + (1 - \mathtt{fdo_i}) * \mathtt{krold_{ip}} + (1 - \mathtt{fdo_i}) * \mathtt{dkods_{ip}} * \mathtt{dso_{ip}}, \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathtt{fdo_i} &= 1.0 \text{ dersom oljestrømmen går fra } i \rightarrow ip \\ &= 0.0 \text{ dersom oljestrømmen går fra } ip \rightarrow i \\ \mathtt{krold_i} &= k_{roi}^n \\ \mathtt{dkods_i} &= (k_{roi}^{n+1,k} - k_{roi}^n)/(s_{oi}^{n+1,k} - s_{oi}^n) \\ \mathtt{dso_i} &= s_{oi}^{n+1,k+1} - s_{oi}^n. \end{aligned}$$

Vi minner også om at $\mathtt{ckx_{ip}} = \mathtt{ckx_i} \cdot \Delta\mathtt{x_i}/\Delta\mathtt{x_{ip}}$.

Videre definerer vi for strømningsledd mellom blokk i og ip:

$$\begin{aligned} \mathtt{oxldp_i} &= \mathtt{bovo_{ip}} * (\mathtt{fdo_i} * \mathtt{krold_i} + (1. - \mathtt{fdo_i}) * \mathtt{krold_{ip}}) \\ \mathtt{doxpp_i} &= \mathtt{bovo_{ip}} * (1. - \mathtt{fdo_i}) * \mathtt{dkods_{ip}} \\ \mathtt{doxpm_i} &= \mathtt{bovo_{ip}} * \mathtt{fdo_i} * \mathtt{dkods_i} \\ \mathtt{pop_i} &= \mathtt{po_{ip}^k} - \mathtt{po_i^k} \end{aligned}$$

For strøm mellom blokk im og i definerer vi:

$$\begin{aligned} \mathtt{oxld_i} &= \mathtt{bovo_i} * (\mathtt{fdo_{im}} * \mathtt{krold_{im}} + (1. - \mathtt{fdo_{im}}) * \mathtt{krold_i}) \\ \mathtt{doxmm_i} &= \mathtt{bovo_i} * \mathtt{fdo_{im}} * \mathtt{dkods_{im}} \\ \mathtt{doxmp_i} &= \mathtt{bovo_i} * (1. - \mathtt{fdo_{im}}) * \mathtt{dkods_i} \\ \mathtt{pom_i} &= \mathtt{po_{ip}^k} - \mathtt{po_i^k}. \end{aligned}$$

Siden

$$\begin{aligned} \mathtt{oxldp_i} &= \mathtt{oxld_{ip}} * \mathtt{dexm} \\ \mathtt{doxpp_i} &= \mathtt{doxmp_{ip}} * \mathtt{dexm} \\ \mathtt{doxpm_i} &= \mathtt{doxmm_{ip}} * \mathtt{dexm} \end{aligned}$$

trenger en bare bruke ett sett av disse størrelsene.

Vannligningen formuleres helt tilsvarende, bortsett fra et ekstra ledd som inneholder kapillartrykket p_c:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{rw}b_w}{\mu_w}\frac{\partial p_w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{rw}b_w}{\mu_w}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{rw}b_w}{\mu_w}\frac{\partial p_c}{\partial x}\right).$$

Det første leddet på høyre side formuleres på samme måte som for oljeligningen. Det er ledd nummer to, kapillarleddet, som volder noe problemer.

Vi definerer størrelsene `wxldm, dwxmp, dwxmm` på samme måte som for oljeligningen. I kapillarleddet har vi et produkt av to metningsavhengige størrelser, nemlig k_{rw} og p_c. Dette produktet tilnærmer vi på følgende måte:

$$\begin{aligned} k_{rw}^{n+1} &\simeq k_{rw}^n \cdot p_c^n + k_{rw}^n \cdot \Delta p_c + p_c^n \cdot \Delta k_{rw} \\ &\simeq k_{rw}^n \cdot p_c^n + k_{rw}^n \cdot \frac{\partial p_c}{\partial s_o}\Delta s_o + p_c^n \cdot \frac{\partial k_{rw}}{\partial s_o}\Delta s_o \end{aligned}$$

Her har en altså neglisjert andre ordens ledd, også kalt kryssledd, av typen $\Delta s_o * \Delta s_o$. Vi definerer $\partial p_c/\partial s_o = \mathtt{dpcds}$, $\partial k_{rw}/\partial s_o = \mathtt{dkwds}$ og er nå istand til å skrive ut kapillarleddet i detalj:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ckk_{rw}b_w}{\mu_w}\frac{\partial p_c}{\partial x}\right) \to \mathtt{wx}^+ * \Delta\mathtt{p}_\mathtt{c}^+ + \mathtt{wx}^- * \Delta\mathtt{p}_\mathtt{c}^-,$$

og

$$\begin{aligned} \mathtt{wx}^+ \cdot \Delta\mathtt{p}_\mathtt{c}^+ &= (\mathtt{wxldm}_\mathtt{ip} * \mathtt{dexm} + \mathtt{dwxmp}_\mathtt{ip} * \mathtt{dexm} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{oip} + \mathtt{dwxmm}_\mathtt{ip} * \mathtt{dexm} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{oi}) \\ &= *(\mathtt{pcld}_\mathtt{ip} + \mathtt{dpcds}_\mathtt{ip} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{oip} - \mathtt{pcld}_\mathtt{i} - \mathtt{dpcds}_\mathtt{i} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{oi}) \end{aligned}$$

Disse leddene multipliseres så ut, og en neglisjerer kryssledd. Dette gir

$$\begin{aligned} \mathtt{wx}^+ * \Delta\mathtt{p}_\mathtt{c}^+ \to\ & \mathtt{wxldm}_\mathtt{ip} * \mathtt{dexm} * \mathtt{pcld}_\mathtt{ip} + \mathtt{dwxmp}_\mathtt{ip} * \mathtt{dexm} * \mathtt{pcld}_\mathtt{ip} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{oip} \\ & + \mathtt{dwxmm}_\mathtt{ip} * \mathtt{dexm} * \mathtt{pcld}_\mathtt{ip} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{oi} + \mathtt{wxldm}_\mathtt{ip} * \mathtt{dexm} * \mathtt{dpcds}_\mathtt{ip} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{oip} \\ & + \text{tilsvarende ledd ved å bruke } i\text{-leddene} \end{aligned}$$

På høyre side av vannligningen har en størrelsen Δb_w som en tilnærmer med

$$\Delta b_w = \frac{\partial b_w}{\partial p_w} \cdot \Delta p_w \to \frac{\partial b_w}{\partial p_w}(\mathtt{po} - \mathtt{pold} - \mathtt{dpcds} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{o}).$$

Vannligningen i detalj — oppsummering

Fullstendig diskretisering av vannligningen 2 gir:

$$\mathtt{wx}_\mathtt{i}^- * \Delta\mathtt{p}_\mathtt{wi}^- + \mathtt{wx}_\mathtt{i}^+ * \Delta\mathtt{p}_\mathtt{wi}^+ + \mathtt{q}_\mathtt{wi} = \phi/\Delta\mathtt{t}(\overline{\mathtt{b}}_\mathtt{wi} * \Delta\mathtt{s}_\mathtt{wi} + \overline{\mathtt{s}}_\mathtt{wi} * \Delta\mathtt{b}_\mathtt{wi}),$$

med følgende definisjoner:

$$\begin{aligned}
\mathtt{wx}_i^- &= \mathtt{wxldm}_i + \mathtt{dwxmm}_i * \Delta \mathtt{s}_{oim} + \mathtt{dwxmp}_i * \Delta \mathtt{s}_{oi} \\
\mathtt{wx}_i^+ &= (\mathtt{wxldm}_{ip} + \mathtt{dwxmm}_{ip} * \Delta \mathtt{s}_{oi} + \mathtt{dwxmp}_{ip} * \Delta \mathtt{s}_{oip}) * \mathtt{dexm} \\
\Delta \mathtt{p}_{wi}^- &= \mathtt{p}_{wim} - \mathtt{p}_{wi} = \mathtt{p}_{oim} - \mathtt{p}_{oi} - \mathtt{p}_{cim} + \mathtt{p}_{ci} \\
\Delta \mathtt{p}_{wi}^+ &= \mathtt{p}_{wip} - \mathtt{p}_{wi} = \mathtt{p}_{oip} - \mathtt{p}_{oi} - \mathtt{p}_{cip} + \mathtt{p}_{ci} \\
\mathtt{pom} &= \mathtt{p}_{oim} - \mathtt{p}_{oi} \\
\mathtt{pop} &= \mathtt{p}_{oip} - \mathtt{p}_{oi}
\end{aligned}$$

Vi velger som sagt å bruke $\mathtt{p}_o$ og $\Delta \mathtt{s}_o = \mathtt{s}_o^{n+1} - \mathtt{s}_o^n$ som ukjente. Leddet $\mathtt{wx}_i^- \cdot \Delta \mathtt{p}_{wi}^-$ blir da

$$\begin{array}{llll}
\mathtt{wxldm}_i * \Delta \mathtt{p}_o^- & - \mathtt{wxldm}_i * \mathtt{pcld}_{im} & + \mathtt{dwxmm}_i * \mathtt{pom} * \Delta \mathtt{s}_{oim} & + \mathtt{dwxmp}_i * \mathtt{pom} * \Delta \mathtt{s}_{oi} \\
 & + \mathtt{wxldm}_i * \mathtt{pcld}_{im} & - \mathtt{wxld}_i * \mathtt{dpcds}_{im} * \Delta \mathtt{s}_{oim} & - \mathtt{dwxmp}_i * \mathtt{pcld}_{im} * \Delta \mathtt{s}_{oi} \\
 & & - \mathtt{dwxmm}_i * \mathtt{pcld}_{im} * \Delta \mathtt{s}_{oim} & + \mathtt{wxldm}_i * \mathtt{dpcds}_i * \Delta \mathtt{s}_{oi} \\
 & & + \mathtt{wxld}_i * \mathtt{pcld}_i * \Delta \mathtt{s}_{oim} & + \mathtt{dwxmp}_i * \mathtt{pcld}_i * \Delta \mathtt{s}_{oi}
\end{array}$$

Vi ønsker å skrive ligningen på formen

$$\mathtt{apow} * \mathtt{po}_{im} + \mathtt{asow} * \mathtt{dso}_{im} + \mathtt{bpow} * \mathtt{po}_i + \mathtt{bsow} * \mathtt{dso}_i + \mathtt{cpow} * \mathtt{po}_{ip} + \mathtt{csow} * \mathtt{dso}_{ip} + \mathtt{dw} = 0.$$

Med

$$\begin{aligned}
\mathtt{pwm} &= \mathtt{pom} + \mathtt{pcld}_i - \mathtt{pcld}_{im} \\
\mathtt{pwp} &= \mathtt{pop} + \mathtt{pcld}_i - \mathtt{pcld}_{im}
\end{aligned}$$

får en

$$\begin{aligned}
\mathtt{apow} &= \mathtt{wxldm}_i \\
\mathtt{asow} &= \mathtt{dwxmm}_i * \mathtt{pwm} - \mathtt{wxldm}_i * \mathtt{dpcds}_{im} \\
\mathtt{bpow} &= -(\mathtt{wxmld}_i + \mathtt{wxldm}_{ip} * \mathtt{dexm}) - \phi/\Delta \mathtt{t} * \overline{\mathtt{s}}_{wi} * \mathtt{dbwdp}_i \\
\mathtt{bsow} &= \mathtt{dwxmp}_i * \mathtt{pwm} + \mathtt{dwxmm}_{ip} * \mathtt{dexm} * \mathtt{pwp} + (\mathtt{wxldm}_i + \mathtt{wxldm}_{ip} * \mathtt{dexm}) * \mathtt{dpcds}_i \\
&\quad + \phi/\Delta \mathtt{t} * (\overline{\mathtt{s}}_{wi} * \mathtt{dbwdp}_i * \mathtt{dpcds}_i + \overline{\mathtt{b}}_{wi}) \\
\mathtt{cpow} &= \mathtt{wxldm}_{ip} * \mathtt{dexm} \\
\mathtt{csow} &= (\mathtt{dwxmp}_{ip} * \mathtt{pwp} - \mathtt{wxldm}_{ip} * \mathtt{dpcds}_{ip}) * \mathtt{dexm} \\
\mathtt{dw} &= \mathtt{wxldm}_i * (\mathtt{pcld}_i - \mathtt{pcld}_{im}) + \mathtt{wxldm}_{ip} * \mathtt{dexm} * (\mathtt{pcld}_i - \mathtt{pcld}_{ip}) \\
&\quad \phi/\Delta \mathtt{t} * \overline{\mathtt{s}}_{wi} * \mathtt{dbwdp}_i * \mathtt{pold}_i + \mathtt{q}_{wi}.
\end{aligned}$$

Oljeligningen blir utformet tilsvarende, og her er det ikke noe kapillartrykksledd

$$\begin{aligned}
\mathtt{apoo} &= \mathtt{oxldm}_i \\
\mathtt{asoo} &= \mathtt{doxmm}_i * \mathtt{pom} \\
\mathtt{bpoo} &= -(\mathtt{oxmld}_i + \mathtt{oxldm}_{ip} * \mathtt{dexm}) - \phi/\Delta \mathtt{t} * \overline{\mathtt{s}}_{oi} * \mathtt{dbodp}_i \\
\mathtt{cpoo} &= \mathtt{oxldm}_{ip} * \mathtt{dexm} \\
\mathtt{csoo} &= \mathtt{doxmp}_{ip} * \mathtt{pop} * \mathtt{dexm} \\
\mathtt{do} &= \phi_i/\Delta \mathtt{t} * \overline{\mathtt{s}}_{oi} * \mathtt{dbodp}_i * \mathtt{pold}_i + \mathtt{q}_{oi}.
\end{aligned}$$

Ukjente $\rightarrow$		*blokk*1		*blokk*2		*blokk*3		*blokk*4		*blokk*5	
Lign. $\downarrow$		$\mathtt{po}_1$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}1}$	$\mathtt{po}_2$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}2}$	$\mathtt{po}_3$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}3}$	$\mathtt{po}_4$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}4}$	$\cdots$	$\cdots$
w	1	bpow	bsow	cpow	csow						
o	2	bpoo	bsoo	cpoo	csoo	$\ddots$					
w	3	apow	asow	bpow	bsow	cpow	csow				
o	4	apoo	asoo	bpoo	bsoo	cpoo	csoo	$\ddots$			
w	5		$\ddots$	apow	asow	bpow	bsow	cpow	csow		
o	6			apoo	asoo	bpoo	bsoo	cpoo	csoo	$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$

Ligningssystem

For et enfasesystem har vi sett at ligningssystemet har en tridiagonal koeffisientmatrise. For to faser har hver blokk to ukjente. Det som i enfasetilfellet var en (skalar) koeffisient blir nå en 2×2 matrise, som illustrert i følgende skjema:

Ukjente $\rightarrow$		*blokk*1		*blokk*2		*blokk*3		*blokk*4		*blokk*5	
Lign. $\downarrow$		$\mathtt{po}_1$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}1}$	$\mathtt{po}_2$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}2}$	$\mathtt{po}_3$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}3}$	$\mathtt{po}_4$	$\Delta\mathtt{s}_{\mathtt{o}4}$	$\cdots$	$\cdots$
w	1	bpow	bsow	cpow	csow						
o	2	bpoo	bsoo	cpoo	csoo	$\ddots$					
w	3	apow	asow	bpow	bsow	cpow	csow				
o	4	apoo	asoo	bpoo	bsoo	cpoo	csoo	$\ddots$			
w	5		$\ddots$	apow	asow	bpow	bsow	cpow	csow		
o	6			apoo	asoo	bpoo	bsoo	cpoo	csoo	$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$

Koeffisientmatrisen blir altså en båndmatrise med båndbredde lik 7. Ligningssystemet kan derfor løses ved den tidligere omtalte subrutinen SOLVE, eller en annen matriseløser, [**?**].

Rateformulering

I tillegg til å bruke konstante rater ønsker en også å produsere mot konstant trykk, `pconst`, ved utløpet av blokk nr. 1.:

$$\mathtt{qo}_1 = \mathtt{bovo}_1 * \mathtt{kro}_1 * (\mathtt{pconst} - \mathtt{po}_1)$$
$$\mathtt{qw}_1 = \mathtt{bwbw}_1 * \mathtt{krw}_1 * (\mathtt{pconst} - \mathtt{po}_1 + \mathtt{pc}_1).$$

Vi regner her at trykket i brønnen, `pconst`, er det samme for olje som for vann.

Uttrykket for oljeraten kan skrives ut på følgende måte, når vi bruker tidligere definerte størrelse:

$$\begin{aligned}\mathtt{qo}_1 = {} & \mathtt{bovo}_1 * \mathtt{krold}_1 * \mathtt{pconst} + \mathtt{bovo}_1 * \mathtt{dkods}_1 * \mathtt{pconst} * \mathtt{dso}_1 \\ & - \mathtt{bovo}_1 * \mathtt{krold}_1 * \mathtt{po}_1 - \mathtt{bovo}_1 * \mathtt{dkods}_1 * \mathtt{po}_1 * \mathtt{dso}_1.\end{aligned}$$

Dette kan vi videre skrive som

$$\mathtt{qo}_1 = \mathtt{qo}_1 + \mathtt{bqop} * \mathtt{po}_1 + \mathtt{bqos} * \mathtt{dso}_1, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

hvor

$$\begin{aligned}\mathtt{qo}_1 &= \mathtt{bovo}_1 * \mathtt{krold}_1 * \mathtt{pconst} \\ \mathtt{bqop} &= -\mathtt{bovo}_1 * \mathtt{krold}_1 \\ \mathtt{bqos} &= \mathtt{bovo}_1 * \mathtt{dkods}_1 * (\mathtt{pconst} - \mathtt{po}_1),\end{aligned}$$

hvor $\mathtt{po}_1$ er den sist iterert verdien.

Tilsvarende får en for vannraten:

$$\mathtt{qw}_1 = \mathtt{qw}_1 + \mathtt{bqwp} * \mathtt{po}_1 + \mathtt{bqws} * \mathtt{dso}_1, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

hvor

$$\begin{aligned}\mathtt{qw}_1 &= \mathtt{bwvw}_1 * \mathtt{krwld}_1 * (\mathtt{pconst} + \mathtt{pcld}_1) \\ \mathtt{bqwp} &= -\mathtt{bwvw}_1 * \mathtt{krwld}_1 \\ \mathtt{bqws} &= \mathtt{bwvw}_1 * \mathtt{dkwds}_1 * (\mathtt{pconst} - \mathtt{po}_1) + \mathtt{bwvw}_1 * (\mathtt{krwld}_1 * \mathtt{dpcds}_1 + \mathtt{dkwds}_1 * \mathtt{pcld}_1).\end{aligned}$$

Uttrykkene for $\mathtt{qo}_1$ og $\mathtt{qw}_1$ settes inn for qo og qw i ligningene og fordeles på de riktige matriseelementene på følgende måte:

$$\begin{aligned}\mathtt{bqop} &\rightarrow \mathtt{bpoo} \\ \mathtt{bqwp} &\rightarrow \mathtt{bpow} \\ \mathtt{bqos} &\rightarrow \mathtt{bsoo} \\ \mathtt{bqws} &\rightarrow \mathtt{bsow},\end{aligned}$$

hvor $\rightarrow$ betyr 'settes inn i'. Etter at løsningen har konvergert beregnes ratene for blokk 1 fra ligningene 4 og 5 før materialbalansen beregnes. Dersom $\mathtt{qo}_1$ eller $\mathtt{qw}_1$ blir positive, settes de lik 0. Vannraten $\mathtt{qw}_1$ kan fysikalsk sett godt bli naturlig negativ, på grunn av endeeffekt.

Noen hint til programmering

- Les inn PVT-tabell og omgjør til ekvidistant, intern tabell på 81 linjer

TP	TBP	TVO	TBW	TVW
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-

- Les inn bergartstabell og omgjør til ekvidistant, intern tabell på 51 linjer:

TSO	TKRO	TKRW	TPC
-	-	-	-
-	-	-	-

- Les inn initiell metningsfordeling
- Beregn OOIP og OWIP
- Rett etter start av tidsstegssløfe uføres følgende:

$$\begin{aligned}
\mathtt{pold} &= \mathtt{po}\\
\mathtt{bold} &= \mathtt{bo}\\
\mathtt{vold} &= \mathtt{vo}\\
\mathtt{bwld} &= \mathtt{bw}\\
\mathtt{vwld} &= \mathtt{vw}\\
\mathtt{pcld} &= \mathtt{pc}\\
\mathtt{krwld} &= \mathtt{krw}\\
\mathtt{krold} &= \mathtt{kro}\\
\mathtt{sold} &= \mathtt{so}
\end{aligned}$$

- Tidssteget kontrolleres nå både av maksimum metningsendring og maksimum trykkendring:

$$\begin{aligned}
\mathtt{dpmax} &= 5.0\text{psi}\\
\mathtt{dsmax} &= 0.05
\end{aligned}$$

- Konvergenssjekk utføres på både `po` og `dso`.
- Materialbalanse utføres både for vann og olje
- `SUBROUTINE FLPROP`

$$\begin{gathered}
\mathtt{bo}, \mathtt{vo}, \mathtt{dbodp}\\
\mathtt{bw}, \mathtt{vw}, \mathtt{dbwdp}
\end{gathered}$$

- `SUBROUTINE SAT`

$$\begin{gathered}
\mathtt{kro}, \mathtt{dkods}\\
\mathtt{krw}, \mathtt{dkwds}\\
\mathtt{pc}, \mathtt{dpcds}
\end{gathered}$$

- `SUBROUTINE FLODIR`

$$\begin{aligned}
\mathtt{fdo}_\mathtt{i} &= 1.0 \text{ dersom } \mathtt{po}_\mathtt{i} > \mathtt{po}_\mathtt{ip}\\
&= 0. \text{ dersom } \mathtt{po}_\mathtt{ip} < \mathtt{po}_\mathtt{i}\\
\mathtt{fdw}_\mathtt{i} &= 1.0 \text{ dersom } \mathtt{pw}_\mathtt{i} > \mathtt{pw}_\mathtt{ip}\\
&= 0. \text{ dersom } \mathtt{pw}_\mathtt{ip} < \mathtt{pw}_\mathtt{i}
\end{aligned}$$

  Denne subrutinen kalles opp <u>en</u> gang etter 1. iterasjon i hvert tidssteg.

- SUBROUTINE TRANS

$$\begin{gathered}\texttt{oxldm}, \texttt{wxldm}\\ \texttt{doxmp}, \texttt{dwxmp}\\ \texttt{doxmm}, \texttt{dwxmm}\end{gathered}$$

- SUBROUTINE RAT
  Dersom `pconst > 0.` beregnes følgende størrelser:

$$\begin{gathered}\texttt{qo}, \texttt{qw}\\ \texttt{bqop}, \texttt{bqwp}\\ \texttt{bqos}, \texttt{bqws}\end{gathered}$$

- SUBROUTINE FLOCON

$$\begin{array}{cc}\texttt{apow} & \texttt{apoo}\\ \texttt{asow} & \texttt{asoo}\\ \vdots & \vdots\\ \texttt{bb}(\texttt{ic},1) & =\texttt{apoo}\\ \texttt{bb}(\texttt{ic},2) & =\texttt{asoo}\\ \vdots & \vdots\\ \texttt{cc}(\texttt{ic}) & =-\texttt{do}\\ \vdots & \vdots\\ \texttt{call solve} & \end{array}$$

  Løsningen returneres i `cc`-matrisen. Deretter settes `so(i) = sold(i) + dso(i)`.

- Sjekk for konvergens

- Når løsningen har konvergert beregnes `qo(1)` og `qw(1)` dersom `pconst > 0.`

Andre kommentarer

- Dersom alle deriverte med hensyn på metning settes lik null, altså at `dkods, dkwds, dpcdsså` er lik null, fås en IMPES formulering av ligningene. Da kan Δs_{oi} elimineres og en får kun en ligning per numerisk blokk.

- Dersom en legger inn helning og gravitasjonsledd `gho, ghw`, må reservoarets ekvilibreres før start av simuleringen.

  – Definer `woc` der hvor $\mathrm{p_c} = 0$.

  – Beregn p_o og p_w som funksjon av høyden

  - $p_c = p_o - p_w$
  - Med denne verdien av p_c går en inn i tabellen og finner s_o.
  - Iterer til likevekt

- Noen modeller bruker sekvensiell løsning. Da løser en først for p_o med `TRIDIA`, deretter for Δs_o med `TRIDIA` og iterer

- På grunn av blokkinndelingen vil modellen vise numerisk dispersjon. Vannfronten vil bli utsmurt. Dette kan rettes på med en frontfølgeteknikk