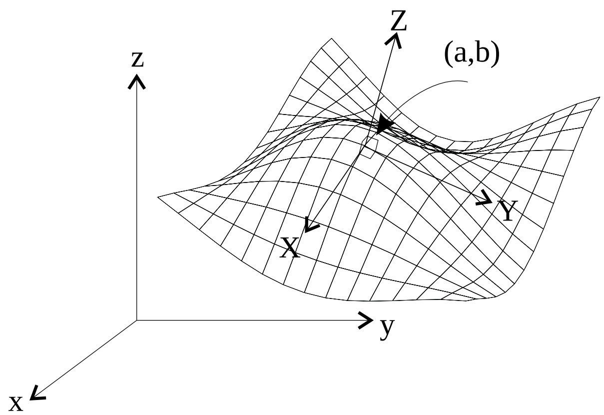
Laplace si likning

Dette er Appendiks A i hovedoppgaven til Leiv Magne Siqveland, Høgskolen i Stavanger, Sivilingeniørutdanningen, innlevert 28. juni 1996.

Krumme flater



Figur 1: Flate i rommet.

Dersom ei flate S, gitt ved funksjonen

$$z = f(x, y), \qquad \qquad (1)$$

har kontinuerleg første ordens deriverte i kvart punkt på S, seier vi at flata er glatt. Ved å Taylor-utvikla funksjonen rundt eit punkt (a, b) på S, får vi ei tilnærming til flata rundt punktet,

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) + \\ \frac{1}{2!}\Bigg[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 + \\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}(y-b)(x-a)\Bigg] + \cdots . \end{aligned} \qquad (2)$$

Vi innfører så eit nytt koordinatsystem (XYZ), med origo i punktet (a, b), og (XY)-planet samanfallande med tangentplanet i dette punktet. Det gir

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial Y} &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Sidan flata er glatt, er derivasjonsrekkjefølgja vilkårleg, og vi kan slå saman kryssledda. Taylor-utviklinga av funksjonen, i det nye koordinatsystemet, når vi sløyfer høgare ordens ledd, vert då

$$
\begin{aligned}
Z = f(X,Y) \quad &\approx \quad \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial X^2}X^2 + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial Y^2}Y^2 + 2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial X \partial Y}XY\right], \\
&= \quad \frac{1}{2}\left[f_{XX}X^2 + f_{YY}Y^2 + 2f_{XY}XY\right].
\end{aligned}
$$

Dette kan igjen skrivast som matriseproduktet

$$
f(X,Y) \approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{XX} & f_{XY} \\ f_{XY} & f_{YY} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{4}
$$

Vi ser at 2×2-matrisen i likn.4 med dei deriverte av f er symmetrisk. Då er matrisen diagonaliserbar med ortogonale eigenvektorar [1]. Vi kan då tilnærma flata med matriseproduktet

$$
\begin{aligned}
f(X,Y) \approx g(\xi,\eta) \quad &= \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \\
&= \quad \frac{1}{2}\alpha\xi^2 + \frac{1}{2}\beta\eta^2, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Her er ξ og η koordinatane langs dei nye einingsvektorane og α og β er eigenverdiar til matrisen. Dette er det same som å rotera tangentplanet om Z-aksen slik at dei to nye einingsvektorane er $(1 \quad 0)^t$ og $(0 \quad 1)^t$ i $(\xi\eta)$-planet.
I $(Z\xi)$ -planet $(\eta = 0)$ vil funksjonen $g(\xi, 0)$ frå likn.5 danna parabelen,

$$
Z = g(\xi, 0) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{6}
$$

Ved å tilnærma parabelen med ein sirkel med radius R_α, får vi

$$
\begin{aligned}
\xi^2 + (Z - R_\alpha)^2 \quad &= \quad R_\alpha^2, \\
\xi^2 + Z^2 - 2ZR_\alpha \quad &= \quad R_\alpha^2, \\
\xi^2 + Z^2 - 2ZR_\alpha \quad &= \quad 0, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

og løyst med omsyn på Z,

$$
\begin{aligned}
Z \quad &= \quad R_\alpha \pm \sqrt{R_\alpha^2 - \xi^2}, \\
&= \quad R_\alpha(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R_\alpha^2}}), \\
&= \quad R_\alpha(1 \pm [1 + \frac{\xi^2}{2R_\alpha^2} - \ldots]).
\end{aligned}
$$

Vel vi her minusteiknet, og sløyfer høgare ordens ledd, får vi det enkle uttrykket

$$
Z \quad \approx \quad \frac{\xi^2}{2R_\alpha}. \tag{8}
$$

Ved å samanlikne likn.6 og likn.8 får vi at

$$Z = \frac{\alpha \xi^2}{2} = \frac{\xi^2}{2R_\alpha},$$

og dermed

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

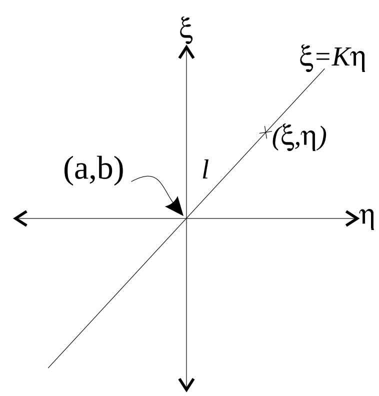
Krumninga κ til ei kurve i eit punkt er definert som den inverse av krumningsradien i punktet. Krumninga til parabelen $Z = g(\xi, 0)$ er altså

$$\kappa = \alpha = \frac{1}{R_\alpha}.$$

Dersom vi ser på $(Z\eta)$-planet $(\xi = 0)$ får vi på same måten at krumninga til denne parabelen, $Z = g(0, \eta)$, er

$$\kappa = \beta = \frac{1}{R_\beta}.$$

Eit vilkårleg plan gjennom punktet (a, b) som står normalt på tangentplanet vil skjera tangentplanet $(\xi\eta)$ langs ei rett line $\xi = K\eta$, der K er ein konstant.



Figur 2: Vilkårleg line gjennom punktet (a, b) i tangentplanet.

Avstanden λ mellom punktet (a, b) og eit gitt punkt (ξ, η) på lina kan då uttrykjast som

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \xi^2 + \eta^2, \\ &= K^2\eta^2 + \eta^2, \\ &= \left(K^2 + 1\right)\eta^2. \end{aligned} \qquad (10)$$

Løyst med omsyn på η^2 får vi

$$\eta^2 = \frac{\lambda^2}{K^2 + 1}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Vi kan då skriva uttrykket for snittet mellom normalplanet og flata $f(\xi, \eta)$ som

$$\begin{aligned} f(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\alpha\xi^2 + \frac{1}{2}\beta\eta^2, \\ &= \frac{1}{2}\alpha K^2\eta^2 + \frac{1}{2}\beta\eta^2, \\ &= \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{K^2\lambda^2}{K^2+1}\right) + \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\lambda^2}{K^2+1}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{K^2}{K^2+1}\alpha + \frac{1}{K^2+1}\beta\right]\lambda^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Krumninga av kurva definert som snittet mellom eit vilkårleg normalplan i punktet (a,b) og flata $f(\xi, \eta)$ vil dermed, som vist ovanfor, vera gitt ved

$$\kappa_1 = \frac{K^2}{K^2+1}\alpha + \frac{1}{K^2+1}\beta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{13}$$

Uttrykket for krumninga er det vi kaller eit vege snitt av α og β. Det vil seia at verdien av κ_1 alltid vil liggja mellom α og β, der den eine gir den største krumninga og den andre den minste. For kurvene definert ved snittet mellom ei flate og normalplana i eit punkt på flata, vil altså kurva med størst krumning og kurva med minst krumning ha normalplan som står normalt på kvarandre. Desse to kurvene vert kalla prinsipalkurvene.
Eit normalplan som skjer tangentplanet i lina $\xi = K\eta$, vil i snittet med flata avteikna ei kurve, som vi vil kalla snittkurve, med krumning κ_1. Eit normalplan som står normalt på dette, vil skjera tangentplanet i lina $\xi = \eta/K$ og ha ei snittkurve med krumning

$$\kappa_2 = \frac{1}{K^2+1}\alpha + \frac{K^2}{K^2+1}\beta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{14}$$

Adderer vi saman krumningane, likn.13 og likn.14, for dei to kurvene får vi

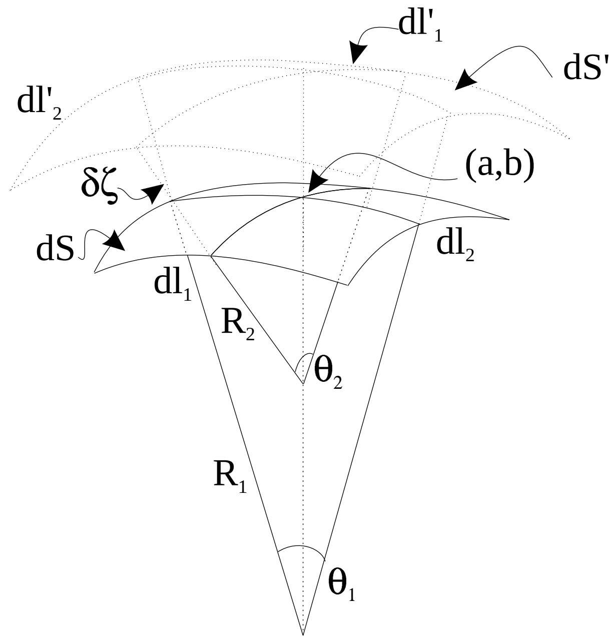
$$\kappa_1 + \kappa_2 = \alpha + \beta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{15}$$

Summen av krumningane til to snittkurver med normalplan som står normalt på kvarandre er altså konstant og lik summen av krumningane til dei to prinsipalkurvene.

Energi i overflata

Vi tenker oss at grenseflata mellom to faser får ei infinitesimal forskyving $\delta\zeta$. Då vil eit volumelement mellom dei to grenseflatene vera gitt ved $\delta\zeta \cdot dS$, der dS er flateelementet. La P_1 og P_2 vera trykket i dei to fasane. Arbeidet gjort ved volumendringa vert då

$$\delta W_p = \int (-P_1 + P_2)\,\delta\zeta dS. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{16}$$



Figur 3: Forskyvning av grenseflate mellom to faser.

Det totale arbeidet ved å forskyva grenseflata vil vera summen av dette arbeidet og arbeidet ved å endra arealet av grenseflata. Denne delen er proporsjonal med arealendringa δS og gitt ved

$$\delta W_\sigma = \sigma \delta S, \qquad (17)$$

der σ er overflatespenninga. Det totale arbeid vert då

$$\delta W = \int (P_2 - P_1)\, \delta\zeta dS + \sigma \delta S. \qquad (18)$$

Ved termodynamisk likevekt vil dette arbeidet vera lik null.
Vi må nå finna eit uttrykk for arealutvidinga δS,

$$\delta S = dS' - dS, \qquad (19)$$

uttrykt ved forskyvinga $\delta\zeta$ og krumningane $1/R_1$ og $1/R_2$ av flata. Arealet av flata før og etter forskyvinga, respektive dS og dS', kan uttrykkast ved å multiplisera saman lengdeelementa langs dei to prinsipalkurvene. Dette kan gjerast avdi prinsipalkurvene, som vist tidlegare, står normalt på kvarandre. Vi får,

$$\begin{aligned} dS &= dl_1 dl_2, \\ dS' &= dl'_1 dl'_2, \end{aligned} \qquad (20)$$

der dl_1, dl_2 og dl'_1, dl'_2 er lengdeelement langs prinsipalkurvene i eit punkt på flata før og etter forskyvinga. Vi byrjar med å uttrykkja flatearealet etter forskyvinga, dS', med kjente storleikar. Lengdeelementa dl_1 og dl'_1 kan skrivast som

$$\begin{aligned} dl_1 &= R_1 \theta_1, \\ dl'_1 &= (R_1 + \delta\zeta)\theta_1, \end{aligned}$$

der θ_1 er vinkelen som vist på fig.3. Dette gir

$$\begin{aligned}\frac{dl_1'}{dl_1} &= \frac{R_1+\delta\zeta}{R_1}\\ &= 1+\frac{\delta\zeta}{R_1}.\end{aligned}$$

Det same gjeld for lengdeelementa dl_2 og dl_2'. Vi set inn for dl_1' og dl_2' i likn.20 og får

$$\begin{aligned}dS' &= dl_1'dl_2',\\ &= \left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}\right)dl_1\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right)dl_2,\\ &= dl_1dl_2\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}\right)\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right),\\ &= dS\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}+\frac{\delta\zeta}{R_2}+\frac{\delta\zeta^2}{R_1R_2}\right),\\ &\approx dS\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right),\quad \text{sidan } \delta\zeta^2 \ll R_1R_2. \qquad (21)\end{aligned}$$

Set vi dette uttrykket inn i likn.19 får vi

$$\begin{aligned}\delta S &= dS'-dS,\\ &= dS\left(1+\frac{\delta\zeta}{R_1}+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right)-dS,\\ &= dS\left(\frac{\delta\zeta}{R_1}+\frac{\delta\zeta}{R_2}\right). \qquad (22)\end{aligned}$$

Dette uttrykket set vi så inn for δS i likn.18 og får

$$\begin{aligned}\delta W &= \int (P_2-P_1)\,\delta\zeta dS+\int \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\delta\zeta dS\\ &= \int\left\{-P_c+\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right\}\delta\zeta dS,\\ &= 0,\quad \text{for alle}\quad \delta\zeta, \qquad (23)\end{aligned}$$

der $P_c = P_1 - P_2$ er kapillartrykket. Då vil, i følge fundamentallemmaet i variasjonsrekning [2],

$$-P_c+\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=0,$$

og omforma får vi at

$$P_c = \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (24)$$

som er Laplace likning.

Referansar

[1] Howard, A.: *Elementary Linear Algebra*, John Wiley and Sons (1984).

[2] Papatzacos, Paul: "Matematisk Modellering," Kompendium ved Høgskolen i Stavanger (1989).